Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac.

Von **O. Klein** in Kopenhagen.

(Eingegangen am 24. Dezember 1928.)

Es wird die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der neuen Diracschen Dynamik untersucht. Bei sehr großen Werten des Potentialsprungs dringen der Theorie zufolge Elektronen gegen die auf sie wirkende elektrische Kraft durch die Sprungfläche und kommen auf der anderen Seite mit einer negativen kinetischen Energie an. Dies dürfte als ein besonders schroffes Beispiel der von Dirac hervorgehobenen Schwierigkeit der relativistischen Dynamik zu betrachten sein.

Einleitung. Wie Dirac* hervorgehoben hat, besteht eine ernste Schwierigkeit für die relativistische Quantentheorie in dem Umstand, daß ein Elektron in einem Kraftfeld nach der Theorie negative Energiewerte annehmen kann, die mit den physikalisch sinnvollen positiven Energiewerten im allgemeinen durch Übergangsmöglichkeiten verbunden sind. Auch in seiner neuen, in anderer Hinsicht so erfolgreichen Behandlung der relativistischen Quantendynamik ist es ihm nicht gelungen, diese Schwierigkeit zu überwinden. In den folgenden Zeilen soll auf ein elementares Beispiel hingewiesen werden, wo diese Schwierigkeit besonders schroff zum Vorschein kommt. Es handelt sich hierbei um die Reflexion und Brechung von Elektronenwellen an einer Grenzfläche, wo das elektrostatische Potential einen Sprung hat.

§ 1. Es sei E die Totalenergie eines in einem kräftefreien Raumteil bewegten Elektrons, während p_1, p_2, p_3 die Komponenten seiner Bewegungsgröße nach den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems angeben mögen, wo das Elektron die Koordinaten x_1, x_2, x_3 hat. Wir wollen annehmen, daß das elektrostatische Potential in dem Raumteil von Null verschieden ist, und zwar soll das Elektron die konstante potentielle Energie P besitzen. Diese Festsetzung hat natürlich nur dann eine Bedeutung, wenn wir diesen Raumteil mit einem anderen Raumteil vergleichen, wo das Potential einen anderen Wert hat. Es gilt nun nach der gewöhnlichen Relativitätsmechanik die folgende Beziehung zwischen der Energie $E - P$, die wir die kinetische Energie des Elektrons nennen wollen (obgleich sie bei einem ruhenden Elektron nicht Null, sondern $m_0 c^2$ ist), und der Bewegungsgröße

$$\left(\frac{E-P}{c}\right)^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m_0^2 c^2. \tag{1}$$

* P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **117**, 612, 1928.

wo m_0 die Ruhemasse des Elektrons und c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten. Die fragliche Schwierigkeit hängt damit zusammen, daß die kinetische Energie sowohl positive wie negative Werte annehmen kann, wodurch neben den physikalisch sinnvollen Lösungen noch weitere Lösungen mit negativer kinetischer Energie vorhanden sind, denen ein physikalischer Sinn nicht zugesprochen werden kann. In der gewöhnlichen Relativitätsmechanik liegt hierin deshalb keine Schwierigkeit, weil das Quadrat der Bewegungsgröße nie negativ werden kann, so daß nach (1) die kinetische Energie nie Null wird; denn da in dieser Theorie nur kontinuierliche Übergänge vorkommen, bedeutet dies, daß die negativen Energiewerte nie erreicht werden können. In der Quantentheorie sind aber die fraglichen Lösungen im allgemeinen nicht voneinander trennbar, weil einerseits diskontinuierliche Strahlungsübergänge möglich sind und andererseits die Elektronenwellen hier durch Gebiete dringen können, wo das Elektron, klassisch gesprochen, eine imaginäre Bewegungsgröße hätte.

§ 2. Für ein Elektron in einem elektrostatischen Kraftfeld, wo das Potential V ist, können wir nach Dirac das quantendynamische Problem auf folgende Wellengleichung zurückführen:

$$\left\{\frac{E+eV}{c}+\beta m c\right\}\psi - i h \sum_1^3 \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0 \tag{2}$$

mit der adjungierten Gleichung

$$\varphi\left\{\frac{E+eV}{c}+\beta m c\right\} + i h \sum_1^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\alpha_k = 0, \tag{2a}$$

wo E wieder die Totalenergie des Elektrons bedeutet, die wir als gegeben betrachten können, während $-e$ seine Ladung bezeichnet und h die mit 2π dividierte Plancksche Konstante bedeutet. Die Größen α_1, α_2, α_3 und β sind Matrizen mit vier Reihen und Kolonnen, die den Relationen genügen:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 0, \quad i \neq k, \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0, \\ \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Dementsprechend bestehen die Funktionen φ und ψ aus je vier Komponenten φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 bzw. ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. Bezeichnet γ eine Matrix mit vier Reihen und Kolonnen, so soll hierbei $\gamma\psi$ als eine Abkürzung für die vier Größen $\sum_{h=1}^{4} \gamma_{ik}\psi_k$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gelten, wo γ_{ik} die

Matrixelemente von γ bezeichnen. Ebenso soll $\varphi\gamma$ aufgefaßt werden als $\sum_{k=1}^{4} \varphi_k \gamma_{ki}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Man sieht, daß es danach erlaubt ist, die Gleichung (2) von links und die Gleichung (2a) von rechts mit irgend einer Matrix zu multiplizieren, ohne ihre Gültigkeit zu beeinträchtigen. Dies bedeutet eben nur eine lineare Transformation des Gleichungssystems.

Wir wollen nun annehmen, daß links von der Ebene $x_1 = 0$ das Potential V gleich 0 ist, während rechts von dieser Ebene $eV = -P$ gilt, wo P eine positive Größe bedeutet. Man wird also erwarten, daß bei dem Durchgang durch diese Ebene die Elektronen einen Teil P ihrer kinetischen Energie verlieren. Um die Reflexion und Brechung von Elektronenwellen an dieser Diskontinuitätsfläche untersuchen zu können, ist es notwendig, die Grenzbedingungen bei Unstetigkeitsflächen für die Diracschen Wellengleichungen aufzufinden. Man kann, wie üblich*, diese durch Betrachtung der Diskontinuitätsfläche als Grenzfall eines Gebiets endlicher Dichte, in dem sich die diskontinuierliche Größe, in diesem Falle das Potential, rasch ändert, ableiten. Da sich die Gleichungen (2) hinsichtlich der Differentialquotienten der Komponenten von ψ senkrecht auf der Diskontinuitätsfläche, in diesem Falle $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \psi_3}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \psi_4}{\partial x_1}$, auflösen lassen, so folgt unmittelbar, falls das Potential in dem Übergangsgebiet nur endlich bleibt, daß die vier Größen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ und natürlich ebenso $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ beim Durchqueren der Diskontinuitätsfläche kontinuierlich bleiben**.

§ 3. Ohne wesentliche Einschränkung können wir nun eine rein harmonische einfallende Welle betrachten, die senkrecht auf die Ebene $x_1 = 0$ auftrifft. Wir setzen demnach für die einfallende Welle, indem wir für x_1 einfach x schreiben:

$$\psi_e = v_e e^{\frac{i}{h}(px - Et)}. \tag{4}$$

* Vgl. H. Faxén und J. Holtsmark, ZS. f. Phys. **45**, 311, 1927, wo eine ähnliche Betrachtung für die Schrödingersche Wellengleichung durchgeführt wurde.

** Durch die Lösbarkeit der Gleichung (2) hinsichtlich des Differentialquotienten der vier Komponenten von ψ nach einer beliebigen räumlichen Richtung folgt auch, daß für eine stetige Lösung alle vier Komponenten nicht an einer Fläche gleich Null sein können, ohne überhaupt zu verschwinden. Die bei der Schrödingerschen Gleichung benutzte Grenzbedingung $\psi = 0$ an einer Wand wird also bei der Diracschen Theorie sinnlos und muß durch Bedingungen ersetzt werden, die in einer näheren Festlegung der physikalischen Beschaffenheit der Wand zu suchen sind.

wo t die Zeit und p den Impuls des Elektrons bezeichnet. Durch Einsetzen von diesem Ausdruck in (2) bekommen wir ein System von linearen algebraischen Gleichungen für die vier Komponenten der Amplitude v_e, das folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\{E/c + \alpha p + \beta m_0 c\} v_e = 0, \tag{5}$$

wo wir α für α_1 gesetzt haben. Wenn v_e nicht identisch verschwinden soll. folgt hieraus die Beziehung

$$E^2/c^2 = p^2 + m_0^2 c^2, \tag{6}$$

welche ein Spezialfall von (1) ist. Für E wollen wir hierbei den positiven Wert wählen. Es sind nun zwei der Komponenten von v_e frei wählbar, was eben den beiden Einstellungsmöglichkeiten des Elektrons in einem Magnetfeld entspricht*.

Aus (6) folgt, daß der Impuls der reflektierten Welle $-p$ sein muß, während für die gebrochene Welle ein Impulswert $\bar{p}$ folgt, der durch die Beziehung

$$\left(\frac{E-P}{c}\right)^2 = \bar{p}^2 + m_0^2 c^2 \tag{7}$$

gegeben ist. Vorerst wollen wir P als so klein annehmen, daß aus (7) ein positiver Wert für $\bar{p}^2$ folgt. Wir können dann setzen:

$$\psi_r = v_r e^{\frac{i}{h}(-px - Et)}, \qquad \psi_g = v_g e^{\frac{i}{h}(\bar{p}x - Et)}, \tag{8}$$

wo ψ_r und ψ_g zu der reflektierten bzw. gebrochenen Welle gehören. Aus (2) folgt:

$$\left\{\frac{E}{c} - \alpha p + \beta m_0 c\right\} v_r = 0, \qquad \left\{\frac{E-P}{c} + \alpha \bar{p} + \beta m_0 c\right\} v_g = 0. \tag{9}$$

Die Grenzbedingung lautet nun einfach:

$$v_e + v_r = v_g. \tag{10}$$

Wenn wir die vier Komponenten der einfallenden Welle als gegeben betrachten, so haben wir acht Unbekannte, nämlich die vier Komponenten von v_r und die vier Komponenten von v_g. Auf Grund von (9) sind aber nur vier von diesen unabhängig, so daß (10) gerade die genügende Anzahl von Gleichungen für die Berechnung derselben liefert. Wir können die Auflösung der Gleichungen hinsichtlich v_r leicht in der folgenden Weise erhalten. Aus (5) und der ersten Gleichung (9) folgt:

$$(E/c + \beta m_0 c)(v_e + v_r) = -\alpha p (v_e - v_r).$$

Aus (9) folgt auf Grund von (10)

$$(E/c + \beta m_0 c)(v_e + v_r) = (P/c - \alpha \bar{p})(v_e + v_r)$$

* Vgl. C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. **118**. 654, 1928.

und also

$$(P/c - \alpha \bar{p})(v_e + v_r) = -\alpha p (v_e - v_r)$$

oder

$$\{P/c - \alpha (p + \bar{p})\} v_r = -\{P/c + \alpha (p - \bar{p})\} v_e.$$

Durch Multiplikation beider Seiten dieser Beziehung mit $\frac{P}{c} + \alpha (p + \bar{p})$ folgt unter Berücksichtigung von $\alpha^2 = 1$ mit Hilfe von (6) und (7)

$$v_r = -\frac{2\, P/c\, (E/c + \alpha p)}{P^2/c^2 - (p + \bar{p})^2} v_e. \tag{11}$$

Um dies Resultat physikalisch verwerten zu können, müssen wir die entsprechende Lösung der adjungierten Wellengleichung (2a) suchen, denn nach Dirac gibt $\varphi \psi dv = \sum_1^4 \varphi_k \psi_k dv$ die Wahrscheinlichkeit, daß wir das Elektron in dem Volumenelement dv antreffen. Hieraus folgt für die Wahrscheinlichkeit, daß das Elektron ein auf der x-Achse senkrechtes Flächenelement df in der Zeit dt durchquert, $-c \varphi \alpha \psi \, df \, dt$, wo $\varphi \alpha \psi$ als Abkürzung für $\sum_{i,k=1}^{4} \varphi_i \alpha_{ik} \psi_k$ steht*. Es ist nun, wie Dirac gezeigt hat, möglich, für α und β Hermitesche Matrizen zu wählen. Wenn ψ eine Lösung der Gleichung (2) bedeutet, so wird φ = konjugiert komplex von ψ eine Lösung von (2a) sein. Indem wir bei Hermiteschen Matrizen für φ und ψ konjugiert komplexe Größen wählen, bekommen wir offenbar reelle Ausdrücke für $\varphi \psi$ und $\varphi \alpha \psi$. Wir setzen demnach

$$\left.\begin{aligned} \varphi_e = u_e e^{-\frac{i}{h}(px - Et)}, \qquad \varphi_r = u_r e^{-\frac{i}{h}(-px - Et)}, \\ \varphi_g = u_g e^{-\frac{i}{h}(\bar{p}x - Et)}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wo u_e, u_r und u_g, falls α und β hermitesch sind, zu den Größen v_e, v_r und v_g konjugiert komplex sind. Aus (2a) und (12) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} u_e \{E/c + \beta m_0 c - \alpha p\} = 0, \qquad u_r \{E/c + \beta m_0 c + \alpha p\} = 0, \\ u_g \left\{\frac{E - P}{c} + \beta m_0 c + \alpha \bar{p}\right\} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Wir leiten nun aus (5) und (13) eine nützliche Identität ab, indem wir (5) von links mit $u_e \alpha$ und die erste Gleichung (13) von rechts mit αv_e multiplizieren. Da α und β antikommutieren und $\alpha^2 = 1$, bekommen wir durch Addition

$$E/c\, u_e \alpha v_e + p\, u_e v_e = 0$$

---

* P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. 118, 351, 1928.

oder

$$-c u_e \alpha v_e = \frac{p c^2}{E} u_e v_e. \tag{14}$$

In der Partikelauffassung bedeutet $\frac{p c^2}{E}$ die Geschwindigkeit des Elektrons (Gruppengeschwindigkeit), so daß diese Gleichung einen Zusammenhang zwischen Stromdichte und Dichte gibt, wie er der gewöhnlichen Hydrodynamik entspricht. Ähnliches gilt natürlich für die reflektierte und die gebrochene Welle (bei der letzteren ist E durch die kinetische Energie $E - P$ zu ersetzen). Zur Berechnung des Bruchteils der Elektronen, der reflektiert bzw. gebrochen wird, genügt es also, die Größen $u_r v_r$ und $u_g v_g$ durch die Komponenten der einfallenden Welle auszudrücken.

Durch eine ähnliche Rechnung wie die, welche zu dem Ausdruck (11) führte, finden wir nun

$$u_r = -u_e \frac{2 P/c (E/c + \alpha p)}{P^2/c^2 - (p + \bar{p})^2}. \tag{15}$$

Aus (10) und (15) folgt dann

$$u_r v_r \left(\frac{2 P/c}{P^2/c^2 - (p + \bar{p})^2}\right)^2 u_e (E/c + \alpha p)^2 v_e$$

$$= \left(\frac{2 P/c}{P^2/c^2 - (p + \bar{p})^2}\right)^2 \left\{(E^2/c^2 + p^2) u_e v_e + \frac{2 E p}{c} u_e \alpha v_e\right\}$$

oder nach (14) und (6)

$$u_r v_r = \left(\frac{2 P m_0}{P^2/c^2 - (p + \bar{p})^2}\right)^2 u_e v_e. \tag{16}$$

Die Größe $\left(\frac{2 P m_0}{P^2/c^2 - (p + \bar{p})^2}\right)^2$ gibt also den Bruchteil der Elektronen an, der reflektiert wird. Wie man mit Hilfe von (6) und (7) leicht nachweist, wächst dieser Reflexionskoeffizient mit zunehmendem P von Null für $P = 0$ und erreicht bei $P = E - m_0 c^2$ den Wert Eins. Eben hier wird nun $\bar{p}^2$ gleich Null, und bei weiterem Anwachsen von P treten wir in das Gebiet der imaginären $\bar{p}$ ein, das wir nun untersuchen wollen.

In der klassischen Theorie bedeutet das Imaginärwerden von $\bar{p}$, daß das Elektron so weit in das Feld eindringt, daß seine Geschwindigkeit Null wird und dann zurückgeworfen wird. In der Wellentheorie werden auch rechts von der Grenzfläche die Wellenfunktionen endliche Werte haben; wie wir aber sehen werden, entsprechen die Verhältnisse zunächst der Totalreflexion in der Optik.

Wenn $\bar{p}$ imaginär ist, können wir setzen:

$$\psi_g = v_g e^{-\mu x - i \frac{E}{h} t}, \quad \varphi_g = u_g e^{-\mu x + i \frac{E}{h} t}, \tag{17}$$

wo μ eine reelle Größe bedeutet, die offenbar positiv sein muß, da sonst die Dichte rechts von der Grenzfläche mit x ins Unendliche wachsen würde. Eben weil in diesem Fall μ reell ist, so muß nach den allgemeinen Vorschriften der Theorie der mit x proportionale Exponent in ψ_g und φ_g dasselbe Vorzeichen haben. Dies bedeutet aber, daß wir bei ψ_g die Größe $\bar{p}$ gleich $i h \mu$ setzen, bei φ_g dagegen gleich $-i h \mu$. Mit dieser Festsetzung bekommen wir aus (11) und (15)

$$v_r = -\frac{2 P/c\,(E/c + \alpha p) v_e}{P^2/c^2 - (p + i h \mu)^2}, \quad u_r = -u_e \frac{2 P/c\,(E/c + \alpha p)}{P^2/c^2 - (p - i h \mu)^2} \tag{18}$$

und also

$$u_r v_r = \frac{(2 P/c)^2 (E^2/c^2 - p^2)}{[(P/c + p)^2 + \mu^2 h^2]\,[(P/c - p)^2 + \mu^2 h^2]} u_e v_e.$$

Wir können diesen Ausdruck mit Hilfe von (6) und (7) vereinfachen. Zunächst folgt

$$\bar{p}^2 = p^2 - \frac{P(2E - P)}{c^2} \tag{19}$$

und also mit $\bar{p}^2 = -\mu^2 h^2$

$$(P/c \pm p)^2 + \mu^2 h^2 = 2 P/c\,(E/c \pm p).$$

Es folgt deshalb einfach

$$u_r v_r = u_e v_e. \tag{20}$$

Der reflektierte Strom ist also gleich dem einfallenden Strom, während hinter der Grenzfläche eine exponentiell abfallende Wellenlösung besteht. Die Bedingung für diesen Fall ist nach (19) $p^2 < \frac{P(2E - P)}{c^2}$, eine Bedingung, die bei wachsendem P dann zuerst erfüllt wird, wenn P den Wert $E - c\sqrt{E^2/c^2 - p^2} = E - m_0 c^2$ überschreitet. Wenn P noch weiter zunimmt, so wird die Größe μ zuerst anwachsen; wegen des in P quadratischen Gliedes in (19) erreicht sie aber ein Maximum, das bei $P = E$ eintritt. Von da an wird μ kleiner und ist bei $P = E + c\sqrt{E^2/c^2 - p^2} = E + m_0 c^2$ wieder Null. Für noch größere P nimmt $\bar{p}$ wieder reelle Werte an, so daß die Formeln (11), (15) und (16) wieder die Lösung des Problems darstellen. In diesem Gebiet ist indessen die kinetische Energie $E - P$ negativ, so daß wir tatsächlich in das mechanisch verbotene Gebiet gelangt sind. Dies hat zur Folge, daß die Gruppengeschwindigkeit, die durch $\frac{c^2}{E - P}\bar{p}$ gegeben ist, dem Impuls entgegengerichtet ist, und wir müssen für $\bar{p}$ einen negativen Wert nehmen*. Dies sieht man leicht, wenn man als Anfangszustand eine Wellengruppe annimmt, die sich von der linken Seite her gegen die Grenzfläche bewegt.

Wir sind also zu dem eigentümlichen Resultat gelangt, daß für P-Werte, die größer als $E + m_0 c^2$ sind, ein Bruchteil der Elektronen die Potentialschwelle durchschreitet, indem ihre kinetische Energie von dem ursprünglichen positiven sich in einen negativen Wert verwandelt. Es ist von Interesse, die Gruppengeschwindigkeit dieser durchgehenden Elektronen zu berechnen. Für diese folgt aus (7)

$$\frac{c^2}{P - E} |\bar{p}| = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0 c^2}{P - E}\right)^2}. \tag{21}$$

Für $P = E + m_0 c^2$ ist diese Geschwindigkeit, wie zu erwarten, gerade gleich Null. Sie wächst dann mit wachsendem P, um für $P = \infty$ die Lichtgeschwindigkeit zu erreichen.

Der Reflexionskoeffizient, der für $P = E + m_0 c^2$ gleich Eins ist, nimmt für wachsendes P, wie man aus dem Ausdruck (16) ersieht, allmählich ab bis zu dem Wert $\frac{E/c - p}{E/c + p}$ für $P = \infty$. Der entsprechende Grenzwert des Bruchteils der Elektronen, der durch die Grenzfläche dringt, ist also $\frac{2p}{E/c + p}$, d. h. von derselben Größenordnung wie das Verhältnis der Geschwindigkeit der einfallenden Elektronen zu der Lichtgeschwindigkeit, und kann für große p-Werte beträchtliche Werte annehmen. Für $p = m_0 c$, einer Geschwindigkeit der einfallenden Elektronen von etwa 70 % der Lichtgeschwindigkeit entsprechend, bekommen wir z. B. den Wert $2(\sqrt{2} - 1)$, d. h. etwa 83 %. Es ist natürlich nicht wesentlich, daß wir hier $P = \infty$ angenommen haben; offenbar würde man Zahlen von derselben Größenordnung bekommen, sobald P mehrere Male größer ist als die Ruheenergie $m_0 c^2$ des Elektrons. Auf die Frage nach der Möglichkeit, solche Potentialsprünge experimentell zu realisieren, wollen wir hier nicht eingehen. Es soll nur hervorgehoben werden, daß die fragliche Schwierigkeit nicht an die Annahme einer Unstetigkeit gebunden ist, die nur zur mathematischen Vereinfachung gewählt wurde. Auch wenn die Sprungfläche durch ein kleines Gebiet ersetzt wird, wo das Potential rasch aber stetig anwächst, werden nach der Theorie, wie

* Ich hatte ursprünglich diesen Umstand nicht beachtet, sondern er ergab sich in einem Gespräch mit Herrn W. Pauli, dem ich hier herzlichst danken möchte.

aus der ganzen Rechnungsweise hervorgeht, Elektronen in das verbotene Gebiet, wo sie negative kinetische Energie besitzen, eindringen, was eng damit zusammenhängt, daß in dem oben diskutierten Fall der Totalreflexion die Wellenlösung hinter der Grenzfläche nicht verschwindet, obgleich das Elektron hier nach der klassischen Mechanik eine imaginäre Bewegungsgröße besitzen würde. Es sei auch erwähnt, daß dem Ausdruck (16) zufolge der Reflexionskoeffizient von Elektronen, die mit der Bewegungsgröße $\bar{p}$ von einem Raumteil, wo die potentielle Energie P ist, gegen die Grenzfläche nach dem freien Raum fallen, denselben Wert hat wie der Reflexionskoeffizient für den umgekehrten Prozeß.

Als Resultat unserer Ausführungen können wir also feststellen, daß die von Dirac betonte Schwierigkeit der relativistischen Quantenmechanik unter Umständen schon bei rein mechanischen Problemen, wo von keinen Strahlungsvorgängen die Rede ist, auftreten kann.

Am Ende dieser Note möchte ich Herrn Professor N. Bohr meinen herzlichsten Dank sagen für viele Gespräche, die wesentlich zur Klärung obenstehender Überlegungen beigetragen haben.

Kopenhagen, Universitetets Institut for teoretisk Fysik, Dez. 1928.