

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 50.

1. *Zur Theorie des Starkeffektes*¹⁾; von *Paul S. Epstein.*

Inhaltsübersicht: § 1. Einleitung. — § 2. Problemstellung. Der Satz von Jakobi. — § 3. Bewegungsgleichungen des Elektrons im Starkeffekt. — § 4. Nähere Betrachtung der Elektronenbahnen. — § 5. Die Quantenbedingungen. — § 6. Berechnung der Bahnenergie aus den Quantenbedingungen. — § 7. Aufspaltung der Linien im Starkeffekt. Vergleich mit der Erfahrung. — § 8. Polarisierung und Intensität der Komponenten. — § 9. Schlußbemerkungen.

§ 1. Einleitung.

Die Einwirkung eines elektrischen Feldes auf die Emission von Spektrallinien wurde im Jahre 1913 von J. Stark²⁾ entdeckt. Auch später behielt Hr. Stark die Führung in der näheren Untersuchung dieser Erscheinung in seiner Hand³⁾ und brachte sie durch sehr sorgfältige Aufnahmen der elektrischen Feinzerlegung der ersten vier Serienlinien des Wasserstoffs (H_α , H_β , H_γ , H_δ) zu einem gewissen Abschluß.⁴⁾ Der Eindruck, den diese Entdeckung in der Fachwelt hervorbrachte, wurde besonders dadurch verstärkt, daß die damals herrschende, mit der Auffassung quasi-elastisch gebundener Elektronen operierende Theorie diesen Erscheinungen vollkommen ratlos gegenüberstand. Denn aus den quantitativen Verhältnissen und der Art der Abhängigkeit vom elektrischen Felde war es von vornherein klar, daß eine ältere Theorie „des elektrischen Analogons zum Zeemaneffekt“ von W. Voigt⁵⁾ hier als Erklärung nicht in Betracht kam.

1) Eine vorläufige Mitteilung der Resultate dieser Arbeit ist in der Physik. Zeitschr. 17. p. 148. 1916 erschienen.

2) J. Stark, Berl. Berichte 47. p. 932. 1913; Ann. d. Phys. 43. p. 965. 1914.

3) J. Stark u. G. Wendt, Ann. d. Phys. 43. p. 983. 1914; J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43. p. 991 u. 1017. 1914; J. Stark, Ann. d. Phys. 48. p. 210. 1915.

4) J. Stark, Gött. Nachr. p. 427. 1914; Ann. d. Phys. 48. p. 193. 1915.

5) W. Voigt, Ann. d. Phys. 4. p. 197. 1901.

Man mußte sich daher nach neuen Grundlagen für die Theorie des Starkeffektes umsehen, und es ist das Verdienst E. Warburgs¹⁾, darauf hingewiesen zu haben, daß diese Grundlagen in einer kurz vorher von Bohr²⁾ gemachten Anwendung der Quantentheorie auf die Atomistik, dem sog. Bohrschen Atommodell, zu suchen seien. Die Behandlung des Starkeffektes auf Grund dieses Modells wurde von Bohr³⁾ selbst angefaßt, welcher in seiner letzten Arbeit bereits zu einer die Lagen der stärksten Komponenten gut wiedergebenden Formel gelangt. Zu einer erschöpfenden Theorie dieser Erscheinungen besaß indessen Bohr noch nicht die vollständigen begrifflichen Hilfsmittel, welche in Form einer Erweiterung der Quantenansätze auf mehrere Freiheitsgrade erst in wichtigen Arbeiten der Herren A. Sommerfeld⁴⁾ und M. Planck⁵⁾ gegeben wurden. Der erstere hat bereits die Anwendbarkeit seiner Gesichtspunkte auf den Starkeffekt betont und gezeigt, daß dieselben ein Anwachsen der Komponentenzahl mit der Seriennummer einer spektralen Linie erwarten lassen.⁶⁾

Unsere Theorie geht von der Betrachtung eines aus einem einzigen Kern und einem einzigen Elektron bestehenden Atoms aus. Zunächst schaffen wir uns Klarheit über Form und Eigenschaften der Bahn, welche das Elektron um den Kern unter der gleichzeitigen Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes beschreibt, wobei im Sinne von Bohr von einem Energieverlust durch Strahlung abgesehen wird (§§ 3, 4). Sodann schreiten wir zur Auswahl der *statischen Bahnen*, d. h. der Bahnen, die gewissen Quantenbedingungen genügen und von der Quantentheorie als allein möglich (bzw. besonders wahrscheinlich) angesehen werden (§§ 5, 6). Bei der Aufstellung dieser Bedingungen schließen wir uns den Ideen der erwähnten Arbeit von Sommerfeld aufs engste an und übernehmen insbesondere die Form seines Quantenansatzes:

$$(1) \quad \int p_i dq_i = n h ,$$

1) E. Warburg, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**. p. 1259. 1913.

2) N. Bohr, Phil. Mag. **26**. p. 1, 476 u. 857. 1913.

3) N. Bohr, Phil. Mag. **27**. p. 506. 1914; **30**. p. 404. 1915.

4) A. Sommerfeld, Münchener Ber. p. 425 u. 459. 1915.

5) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **17**. p. 407 u. 438. 1915; Berliner Ber. p. 909. 1915.

6) A. Sommerfeld, l. c. p. 429.

wo q_i eine (kanonische) Lagenkoordinate, p_i den zugehörigen Impuls, h das Plancksche Wirkungsquantum und n eine ganze Zahl bedeutet. Entsprechend den drei Freiheitsgraden unseres Elektrons haben wir *drei Quantenbedingungen* von der Form (1) anzusetzen.¹⁾ Eine Erweiterung und Vertiefung dieses Ansatzes liegt bei uns insofern vor, als wir für eine neue Klasse von Problemen den Integrationsweg angeben können, über welchen das Integral (1) zu erstrecken ist. Bis jetzt war es nämlich nur für periodische Bahnen ganz klar, wie die Bedingung (1) zu handhaben ist. Das von uns im folgenden zu behandelnde Problem gehört zu einer Klasse von Bewegungen, die nach Charlier als *Librationen*²⁾ bezeichnet werden. Damit ist gemeint, daß gewisse Lagenkoordinaten der Bahn zwischen zwei festen Grenzwerten quasi-periodisch hin und her schwanken. *Der wesentliche Gedanke der folgenden Ausführungen besteht nun darin, daß wir das Integral (1) in diesen ausgezeichneten Koordinaten über einen Bahnabschnitt zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührungen desselben Grenzwertes erstrecken.* Mathematisch gesprochen gehören hierher (mit praktisch belanglosen Einschränkungen) diejenigen Fälle, in welchen sich die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen durch Separation der Variablen integrieren lassen³⁾, und unsere ausgezeichneten Koordinaten sind gerade die, durch deren Einführung diese Separation erreicht wird. Wir werden sehen, daß in allen diesen Fällen die Energie durch die Quantenzahlen (n_1, n_2, n_3 , entsprechend den drei Freiheitsgraden) der Bedingungen (1) vollständig bestimmt ist.

In der Bestimmung der Energie einer statischen Bahn im Starkeffekt, deren *negativen* Wert wir mit A bezeichnen, gipfeln unsere Rechnungen. Den Übergang zu den emittierten

1) A. Sommerfeld rechnet in seinen allgemeinen Betrachtungen über den Starkeffekt nur mit zwei Quantenzahlen n, n' ; unsere Betrachtungsweise liegt aber, insofern als sie drei Parameter einführt, durchaus in seinem und dem Planckschen Sinn, enthält also in diesem Punkte keine wesentliche Erweiterung.

2) C. L. Charlier, Die Mechanik des Himmels. Bd. I. p. 94. Leipzig 1902.

3) Bekanntlich hat P. Stäckel (Compt. rend. 116. p. 485. 1893; 121. p. 489. 1895), die Bedingungen für die Möglichkeit der Separation in einer für die Bedürfnisse der Praxis ausreichenden Allgemeinheit aufgestellt.

Wellenlängen bewerkstelligen wir durch einen zweiten Quantensatz, die „*Frequenzbedingung*“, indem wir mit Bohr und Sommerfeld annehmen, daß Strahlung nur während des Überganges des Elektrons zwischen zwei statischen Bahnen stattfindet, und daß sich die Schwingungszahl ν aus der Energiedifferenz dieser Bahnen gemäß der Gleichung bestimmt:

$$(2) \quad A_2 - A_1 = h\nu .$$

Den Schluß (§§ 7, 8, 9) bildet die physikalische Diskussion der Resultate und deren Vergleich mit der Erfahrung.

§ 2. Problemstellung. Der Satz von Jakobi.

Wir wollen, den Verhältnissen im Starkeffekt entsprechend, die Bewegung eines Elektrons unter der Wirkung eines festen Anziehungszentrums und eines homogenen elektrischen Feldes untersuchen. Streng genommen, ist der Atomkern gegen das Elektron nicht unendlich schwer und führt selbst Bewegungen um den gemeinsamen Schwerpunkt aus. Die Berücksichtigung dieser Mitbewegung würde keine neuen mathematischen Schwierigkeiten bedingen, jedoch eine unnötige Komplikation der Schreibweise, da sie für die Aufspaltung im Starkeffekt eine Korrektur ergibt, die in ihrer Kleinheit weit außerhalb jeder Meßmöglichkeit liegt.

Die Ladung des Elektrons sei $-e$, die des Kernes $+ze$, die Feldstärke des homogenen Feldes E . Wir wählen den festen Punkt als Nullpunkt und die Richtung der Kraft E als Achse (x -Richtung) eines zylindrischen Koordinatensystems (x, y, φ). Dann ist die potentielle Energie des Elektrons:

$$(3) \quad U = -\frac{ze^2}{r} - eEx ,$$

wenn

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

die Entfernung vom Nullpunkt bezeichnet (Fig. 1, p. 498). Die kinetische Energie ist:

$$(4) \quad T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{s}^2}{2} ,$$

wo m die Masse des Elektrons, v die Geschwindigkeit, s ein Segment seiner Bahn bedeutet und durch einen Punkt die

Ableitung nach der Zeit (t) angedeutet wird. Die Gesamtenergie

$$(5) \quad H = T + U$$

wird als Hamiltonsche Funktion bezeichnet, wenn man als Variable drei (kanonische) Lagenkoordinaten q_1, q_2, q_3 und drei Impulse:

$$(6) \quad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

einführt. Für die Funktion $H(p_i, q_i)$ gelten bekanntlich die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen:

$$(7) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Jakobi hat eine für unseren Fall sehr bequeme Integrationsmethode der kanonischen Gleichungen angegeben, welche darauf beruht, daß die Gleichungen (7) die charakteristischen Gleichungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung sind. Im allgemeinen Fall kann man die Hamiltonsche Funktion so schreiben:

$$(8) \quad H(p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots, q_n; t).$$

Jakobi hat nun gezeigt, daß wenn man setzt:

$$(9) \quad p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

man das Problem auf die Integration der folgenden Differentialgleichung zurückführen kann:

$$(10) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial q_n}; q_1, q_2, \dots, q_n; t\right) = 0.$$

Der Satz von Jakobi läßt sich in folgenderweise aussprechen¹⁾:

Es sei (die Jakobische Wirkungsfunktion) V durch die Gleichung (10) als Funktion der unabhängigen Variablen q_1, q_2, \dots, q_n, t gegeben. Wenn man ein vollständiges Integral dieser Gleichung:

$$(11) \quad V(q_1, q_2, \dots, q_n, t; a_1, a_2, \dots, a_n) + \text{const.}$$

1) Vgl. z. B. P. Appell, *Mécanique rationelle*. II. p. 400. Paris 1904. Die bei uns benutzten Bezeichnungen stammen von Jakobi; bei anderen Autoren findet man gelegentlich für V den Buchstaben S .

mit n willkürlichen Konstanten a_1, a_2, \dots, a_n kennt, von denen keine eine additive Konstante ist, so sind die allgemeinen Integrale der kanonischen Gleichungen (7):

$$(12) \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = b_2, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial a_n} = b_n,$$

$$(9') \quad p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \dots \quad p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n}.$$

mit $2n$ willkürlichen Konstanten.

In unserem besonderen Fall geht die Zeit nicht explizite in den Ausdruck der Hamiltonschen Funktion ein. Man kann deshalb setzen:

$$(13) \quad V = At + W,$$

wodurch sich die Jakobische Gleichung auf die folgende Form reduziert:

$$(14) \quad A + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}; q_1, q_2, q_3\right) = 0.$$

Die Konstante A bedeutet offenbar die mit *negativem* Vorzeichen versehene Energie des Elektrons. Neben ihr müssen noch zwei weitere nichtadditive Konstanten im Integralausdruck:

$$(15) \quad W(q_1, q_2, q_3; A, \alpha, \beta)$$

auftreten. Die Bahngleichungen des Elektrons finden wir dann nach obiger Vorschrift durch Differentiation nach diesen Konstanten:

$$(16) \quad \frac{\partial W}{\partial A} + t = t_0, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha', \quad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta',$$

Während für die Impulse die Beziehungen gelten:

$$(17) \quad p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad p_3 = \frac{\partial W}{\partial q_3}.$$

Besonders einfache Verhältnisse liegen dann vor, wenn sich W als Summe dreier Summanden, von denen jeder resp. nur von q_1, q_2, q_3 abhängt, darstellen läßt:

$$(18) \quad W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + W_3(q_3),$$

da sich dann die Funktionen W_1, W_2, W_3 aus drei gewöhnlichen Differentialgleichungen berechnen. Schon Jakob selbst hat gezeigt, daß im Falle der Bewegung eines Massenpunktes unter der Wirkung zweier festen Anziehungszentren sich eine

solche „*Separation der Variablen*“ durch Einführung elliptischer Koordinaten erreichen läßt. Unser Fall geht aus dem Jakobischen hervor, wenn das eine Anziehungszentrum ins Unendliche verlegt wird. Die elliptischen Koordinaten arten dabei in parabolische aus.

§ 3. Bewegungsgleichungen des Elektrons im Starkeffekt.

In § 2 haben wir die Lagen in der Meridianebene eines Zylinderkoordinatensystems durch die cartesischen Parameter x, y gekennzeichnet. Wir gehen jetzt zu parabolischen Koordinaten durch die Beziehung über (vgl. Fig. 1):

$$(19) \quad x + iy = \frac{1}{2} (\xi + i\eta)^2,$$

woher:

$$(20) \quad \begin{cases} x = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}, \\ y = \xi\eta, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}, \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} ds^2 = (dx + idy)(dx - idy) + y^2 d\varphi^2 \\ \quad = \frac{1}{4} (\xi^2 + \eta^2) (d\xi^2 + d\eta^2) + \xi^2 \eta^2 d\varphi^2. \end{cases}$$

Nach (3) und (4) sind in dieser Schreibweise die kinetische und potentielle Energie:

$$(22) \quad T = \frac{m}{8} (\xi^2 + \eta^2) \left[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \frac{\xi^2 \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \dot{\varphi}^2 \right],$$

$$(23) \quad U = - \frac{4\pi e^2 + eE(\xi^4 - \eta^4)}{2(\xi^2 + \eta^2)}.$$

Für die Bildung der Hamiltonschen Funktion müssen wir an Stelle der Geschwindigkeiten durch die Beziehungen (6) die Impulse als Variable einführen:

$$(24) \quad \begin{cases} p_\xi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = \frac{m}{4} (\xi^2 + \eta^2) \dot{\xi}; & p_\eta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}} = \frac{m}{4} (\xi^2 + \eta^2) \dot{\eta}; \\ p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m}{4} \xi^2 \eta^2 \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Das ergibt:

$$(25) \quad \begin{cases} H = T + U = \frac{1}{2m(\xi^2 + \eta^2)} \\ \quad \cdot \left[p_\xi^2 + p_\eta^2 + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) p_\varphi^2 - 4\pi m e^2 - m e E (\xi^4 - \eta^4) \right]. \end{cases}$$

Nach Vorschrift des § 2 bilden wir jetzt gemäß (14) die Jakobische Gleichung:

$$(26) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2m(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 - 4\kappa m e^2 - m e E (\xi^4 - \eta^4) \right\} + A = 0. \end{aligned} \right.$$

Man sieht sofort, daß durch den Ansatz

$$(27) \quad W = \sqrt{m} \alpha \varphi + W_1(\xi) + W_2(\eta)$$

eine Separation der Variablen bewirkt wird; dabei bedeutet $\sqrt{m}\alpha$ die Flächenkonstante in der Bewegung um die x -Richtung. In der Tat, aus:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} & A + \frac{1}{2m(\xi^2 + \eta^2)} \left\{ \left(\frac{dW_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dW_2}{d\eta} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\eta^2} \right) m \alpha^2 - 4\kappa m e^2 - m e E (\xi^4 - \eta^4) \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

erhält man:

$$(29) \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{dW_1}{d\xi} \right)^2 - 2\kappa m e^2 + 2m A \xi^2 - m e E \xi^4 + \frac{m \alpha^2}{\xi^2} \right] \\ & = - \left[\left(\frac{dW_2}{d\eta} \right)^2 - 2\kappa m e^2 - 2m A \eta^2 + m e E \eta^4 + \frac{m \alpha^2}{\eta^2} \right]. \end{aligned} \right.$$

Die linke Seite ist eine Funktion von ξ allein, die rechte von η allein. Das ist nur dann möglich, wenn sie beide einer und derselben Konstanten ($m e^2 \beta$) gleich sind. Also:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} & \frac{dW}{d\xi} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{2e^2(x + \beta) - 2A\xi^2 + eE\xi^4 - \alpha^2/\xi^2} = \sqrt{m f_1(\xi)}, \\ & \frac{dW}{d\eta} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{2e^2(x - \beta) - 2A\eta^2 - eE\eta^4 - \alpha^2/\eta^2} = \sqrt{m f_2(\eta)}. \end{aligned} \right.$$

woher nach (27):

$$(31) \quad \frac{1}{\sqrt{m}} W = \alpha \varphi + \int_0^\xi \sqrt{f_1(\xi)} d\xi + \int_0^\eta \sqrt{f_2(\eta)} d\eta.$$

Hieraus erhalten wir nach (16) sofort die gesuchten Bewegungsgleichungen durch Differentiation nach den Konstanten β , α und A (für die in (16) mit α' bezeichnete Konstante schreiben wir jetzt φ_0):

$$(32) \quad \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} - \int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = \beta',$$

$$(33) \quad \int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{f_1(\xi)}} \cdot \frac{d\xi}{\xi^2} + \int_0^{\eta} \frac{1}{\sqrt{f_2(\eta)}} \cdot \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha},$$

$$(34) \quad \int_0^{\xi} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{f_1(\xi)}} + \int_0^{\eta} \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{f_2(\eta)}} = t - t_0.$$

Die erste dieser Gleichungen gibt uns die Bahn, in der mit dem Elektron rotierenden Meridianebene; die zweite gibt den zu einem Koordinatenpaar (ξ, η) gehörenden Azimut φ ; die dritte orientiert über den zeitlichen Ablauf der Bewegung. Von diesen drei Gleichungen interessiert uns nur die erste. Wir wollen sie jetzt näher betrachten, um uns über die Verhältnisse in der mitrotierenden Meridianebene zu unterrichten.

§ 4. Nähere Betrachtungen der Elektronenbahnen.

Die Wendepunkte der Bahn, in denen sie eine gemeinsame Tangente mit einer der Parabeln $\xi = \text{const.}$ oder $\eta = \text{const.}$ hat, werden bestimmt durch das Verschwinden einer der Ausdrücke:

$$(35) \quad \frac{d\xi}{d\eta} = \sqrt{\frac{f_1(\xi)}{f_2(\eta)}} \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \sqrt{\frac{f_2(\eta)}{f_1(\xi)}},$$

also durch die Nullstellen der Funktionen $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$. Diese sind Polynome dritten Grades in ξ^2 bzw. η^2 , so daß man sie nach (30) auch so schreiben kann:

$$(36) \quad \begin{cases} f_1(\xi) = \frac{eE}{\xi^2} (\xi^2 - \xi_1^2)(\xi^2 - \xi_2^2)(\xi^2 - \xi_3^2), \\ f_2(\eta) = -\frac{eE}{\eta^2} (\eta^2 - \eta_1^2)(\eta^2 - \eta_2^2)(\eta^2 - \eta_3^2). \end{cases}$$

In unserem Fall sind alle drei Wurzeln reell. Ist das äußere homogene Feld E schwach im Vergleich zu der Anziehung des Zentrums ($\propto e/r^2$), so wird die äußerste Wurzel ξ_3^2 (bzw. η_3^2) dem Absolutwert nach sehr groß¹⁾, die beiden anderen sind dann wenig verschieden von ihrem Werte bei verschwindendem E , d. h. von den Grenzparabeln, welche das Elektron bei Kepler-scher Bewegung erreichen würde. Die dieser Bewegung benachbarten Bahnen im Starkeffekt sind also so beschaffen,

1) Dabei wird η_3^2 negativ, entspricht also keinem physikalisch möglichen Wert von η ; dagegen ist ξ_3^2 positiv.

daß das Elektron stets in dem in Fig. 1 veranschaulichten krummlinigen Rechteck $ABCD$ zwischen den Parabelpaaren ξ_1, ξ_2 und η_1, η_2 eingeschlossen bleibt und zwischen diesen Grenzen, unter jedesmaliger Erreichung derselben, hin und her pendelt. Nach einem allgemeinen Satz von Stäckel wird dabei der bei Umdrehung der Meridianebene um die x -Achse aus dem krummlinigen Rechteck entstehende Rotationskörper von der Bahn überall dicht erfüllt.

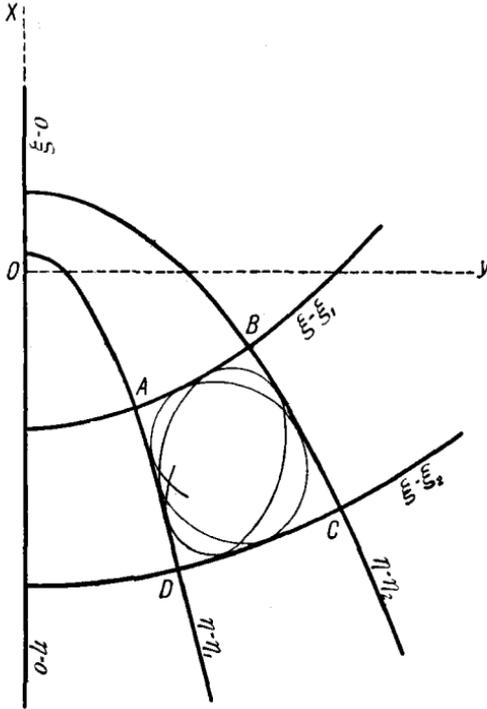


Fig. 1.

Im Interesse der letzten Paragraphen wollen wir noch auf einige Ausartungen der in Fig. 1 gegebenen allgemeinen Bahnform eingehen, indem wir die Fälle besprechen, wenn eines oder zwei der Wirkungsintegrale $W_1(\xi)$, $W_2(\eta)$, $W_3(\varphi)$ der Gleichungen (27) und (31) dauernd gleich Null sind:

a) $W_1(\xi) = 0$ oder $W_2(\eta) = 0$. Dieser Fall tritt ein, wenn eines der Polynome $f_1(\xi)$ oder $f_2(\eta)$ eine Doppelwurzel hat, so daß $\xi_1 = \xi_2$ oder $\eta_1 = \eta_2$ folgt. Das Viereck $ABCD$ artet dabei durch Zusammenrücken von zwei gegenüberliegenden

Seiten in ein Parabelsegment aus, so daß man dauernd $\xi = \xi_1 = \xi_2$ oder $\eta = \eta_1 = \eta_2$ hat. Die ganze Bewegung verläuft auf der Oberfläche eines Rotationsparaboloids zwischen zwei auf dieser Oberfläche gezogenen Grenzkreisen.

b) Es gilt gleichzeitig $W_1(\xi) = W_2(\eta) = 0$, d. h. $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ haben gleichzeitig Doppelwurzeln. Da diese Funktionen drei verfügbare Konstanten enthalten (A, α, β), so ist dieser Fall bei jedem vorgegebenen α möglich. Das Viereck $ABCD$ zieht sich dann auf einem einzigen Punkt zusammen, und das Elektron beschreibt eine zur x -Achse senkrechte Kreisbahn. Nach (30) würde sich bei Vernachlässigung des Gliedes mit E ergeben $\beta = 0, \xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_2$: das bedeutet eine Bewegung in der Äquatorialebene $x = 0$. Bei endlichem, aber kleinem E ist die Kreisbahn entsprechend nur wenig gegen diese Ebene verschoben.

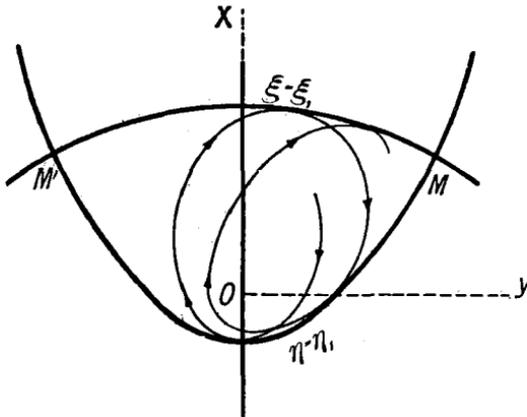


Fig. 2.

Überhaupt, wenn $W_1(\xi)$ und $W_2(\eta)$ den gleichen mittleren Zuwachs haben, so bedeutet dies, daß das krummlinige Viereck $ABCD$ in bezug auf die Äquatorialebene nahezu symmetrisch liegt.

c) $W_3(\varphi) = 0$, d. h. $\alpha = 0$. In diesem Falle ist keine Rotationsbewegung um die x -Achse vorhanden, und die Bahn verläuft in einer festen Meridianebene (Fig. 2). Die Polynome $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$ werden zweiten Grades, so daß eine der resp. Wurzeln wegfällt. Das Elektron bleibt deshalb, wie in Fig. 2 veranschaulicht, in einem Bogenzweieck eingeschlossen.

d) Gilt außer $W_3(\varphi) = 0$ noch $W_1(\xi) = 0$ oder $W_2(\eta) = 0$, so ist eine Doppelwurzel von $f_1(\xi)$ oder $f_2(\eta)$ nur dann möglich, wenn $\beta = \pm x$ und $\xi_1 = 0$ (oder $\eta_1 = 0$) wird. Eine der Grenzparabeln klappt also in eine doppeltdurchlaufene Strecke der x -Achse zusammen, und das Elektron pendelt in der x -Achse geradlinig zwischen zwei festen Punkten hin und her, wobei es dem Kern unendlich nahe kommt. Ohne ein äußeres elektrisches Feld ist eine solche Bahn (eine Keplerellipse von der Exzentrizität 1) aus relativistisch-energetischen Gründen unmöglich, weshalb sie auch Sommerfeld bei Berechnung der Dubletten von Spektrallinien nicht in Betracht zieht. Die Beobachtungen über den Starkeffekt zeigen aber, daß sie hier ohne jeden Zweifel auftreten, wenn auch die zu ihnen gehörenden Komponenten äußerst schwach sind (vgl. § 8). Es scheint, daß das Hinzutreten einer äußeren Kraft diese *Pendelbahnen* wieder möglich macht, und es wäre eine interessante Frage, zu untersuchen, ob hierzu die Feldstärke über eine untere Grenze hinausgehen muß, bei deren Unterschreitung die entsprechenden Linien noch nicht emittiert werden können. Leider gehört die relativistische Bewegung um ein Anziehungszentrum bei gleichzeitiger Wirkung eines äußeren Feldes nicht zu der Klasse von Problemen, die sich durch Separation der Variablen lösen lassen, so daß es noch unbekannt ist, wie in diesem Falle die Quantenansätze zu handhaben sind.

Bei verschwindender Feldstärke E müssen unsere Bahngleichungen (32), (33), (34) offenbar eine Keplerellipse liefern. Wir wollen angeben, wie unsere Konstanten A , α , β , β' sich dann durch die gebräuchlichen Bestimmungsstücke einer solchen ausdrücken. Es bezeichne p die Flächenkonstante in der Ellipsenbahn, ε die Exzentrizität; dann ist die Keplerellipse in Polarkoordinaten (r, ψ) ihrer Ebene gegeben durch die Gleichung:

$$(37) \quad r = \frac{p^2}{\kappa e^2 m} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos(\psi - \psi_0)} .$$

Es sei ferner Θ_0 der Winkel zwischen der Normalen zur Ellipsenbahn und unserer x -Richtung, ψ_0 der Winkel in der Ebene der Ellipse zwischen den Richtungen des Perihels und des Knotens (Schnittpunkt der Bahn mit der Äquatorialebene $x = 0$). Dann bedeuten unsere Konstanten:

Die negative Energie:

$$(38) \quad A_0 = \frac{m x^2 e^4 (1 - \varepsilon^2)}{2 p^2} .$$

Die Flächenkonstante in der zur x -Achse senkrechten Ebene:

$$(39) \quad \begin{aligned} \sqrt{m} \cdot \alpha &= p \cos \Theta_0 , \\ \beta_0 &= x \varepsilon \sin \Theta_0 \sin \psi_0 , \end{aligned}$$

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin (\sqrt{8m} A_0 \cdot \beta_0') \\ &= \frac{2 s \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \Theta_0 \cos \psi_0}{\sqrt{(\varepsilon^2 - s^2 \sin^2 \Theta_0 \cos^2 \psi_0 + \sin^2 \Theta_0) - 4 \varepsilon^2 \sin^2 \psi_0 \sin^2 \Theta_0}} . \end{aligned} \right.$$

Unsere obigen Erörterungen über die Form der Bahn im Starkeffekt zeigen, daß diese Keplerellipse bei nicht verschwindendem E eine schlechte Näherung der wirklichen Bewegung darstellt.

§ 5. Die Quantenbedingungen.

Jetzt müssen wir aus der Gesamtheit aller mechanisch möglichen Bahnen diejenigen auswählen, welche den Bohr-Sommerfeldschen Quantenbedingungen entsprechen. Wir wollen sie im Anschluß an Bohr als „statische Bahnen“ bezeichnen. In der von Sommerfeld gegebenen Fassung sind die Quantenbedingungen nach (1):

$$(41) \quad \int p_\xi d\xi = n_1 h, \quad \int p_\eta d\eta = n_2 h, \quad \int p_\varphi d\varphi = n_3 h,$$

oder mit Berücksichtigung unserer Gleichungen (17) und (30):

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{m} \int \sqrt{f_1(\xi)} d\xi = n_1 h, \quad \sqrt{m} \int \sqrt{f_2(\eta)} d\eta = n_2 h, \\ &\sqrt{m} \int \alpha d\varphi = n_3 h . \end{aligned} \right.$$

Wir stehen nun vor der wichtigen Frage nach dem Integrationsbereich dieser drei Integrale, auf welche uns die in den Fällen periodischer Bahnen gesammelte Erfahrung keine direkte Antwort gibt. Es zeigt sich indessen, daß schon die einfachste und nächstliegende Annahme zu einer vorzüglichen Übereinstimmung mit der Erfahrung führt. Betrachten wir nämlich die Koordinate ξ für sich allein, deren Werte wir uns etwa auf einer Geraden aufgetragen denken, so wird diese Gerade von dem Grenzpunkt ξ_1 bis zu dem anderen ξ_2 und

wieder zurück abwechselnd durchlaufen, genau so wie dies in der von Sommerfeld¹⁾ betrachteten periodischen Bewegung in der Keplerellipse für den Abstand vom Brennpunkt r der Fall ist. Es scheint uns deshalb das Plausibelste zu sein, die Integration in den Variablen ξ und η von ξ_1 bis ξ_2 (bzw. η_1, η_2) und wieder zurück zu erstrecken, dagegen in φ von 0 bis 2π .²⁾ Die Einheitlichkeit in den drei Koordinaten kann durch Einführung von Hilfsvariablen für ξ und η , welche gleichfalls von 0 bis 2π variieren (wie wir sie übrigens bei der numerischen Rechnung wirklich benutzen werden) erreicht werden. Da die Impulse gleichzeitig mit $d\xi, d\eta$ das Vorzeichen wechseln, ergibt diese Annahme die Bedingungen:

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} 2\sqrt{m} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{f_1(\xi)} d\xi = n_1 h, \quad 2\sqrt{m} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{f_2(\eta)} d\eta = n_2 h, \\ \sqrt{m} \int_0^{2\pi} a d\varphi = n_3 h. \end{array} \right.$$

Wir wollen auf einen weiteren wichtigen Umstand hinweisen, der eine solche Wahl der Integrationsgrenzen noch ferner rechtfertigt: Planck³⁾ führt bereits die wichtige Forderung ein, daß durch die Quantenzahlen die Energie bestimmt sein muß. Für uns wird dieses Desiderat sogar zur zwingenden Notwendigkeit, da wir für die Bestimmung der Wellenlängen die Bohrsche „Frequenzbedingung“ (2) benutzen wollen. Wäre die Energie nicht vollkommen bestimmt, so wären überhaupt keine scharfen Spektrallinien möglich. Man sieht nun, daß diese Forderung durch die Bedingungen (43) von selbst erfüllt ist. Die Bewegungsgleichungen (32), (33), (34) des Elektrons enthalten zwar sechs Konstanten; von diesen kommen jedoch in unseren Quantenbedingungen nur drei vor, denn auch die Integrationsgrenzen sind als Wurzeln der Polynome $f_1(\xi)$ und $f_2(\eta)$

1) A. Sommerfeld, l. c.

2) Es ist zu bemerken, daß die relativistische Keplerbewegung gleichfalls zu der Klasse gehört, für welche sich die kanonischen Gleichungen durch Separation der Variablen integrieren lassen. Im Nachtrag zu seiner zweiten Abhandlung (l. c. p. 499) gibt Sommerfeld eine Wahl der Integrationsgrenzen für die Quantenbedingungen als möglich an, welche gute Übereinstimmung mit der Erfahrung liefert und sich in unseren Gesichtspunkt vollständig einordnet.

3) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. p. 409. 1915.

durch dieselben drei Konstanten bestimmt. Die drei Gleichungen (43) geben also die Abhängigkeit der Konstanten A , α , β , von denen die eine die Energie bedeutet, von den Quantenzahlen n_1 , n_2 , n_3 .

Diese Bemerkung gilt für alle Fälle, in welchen die Integration der Hamiltonschen Gleichungen durch Separation der Variablen erreicht werden kann; denn nach den Ausführungen des § 2 sieht man leicht, daß dann jeder der n Impulse p_i eine Funktion der zugehörigen Lagenkoordinate q_i und der n willkürlichen Konstanten a_1, a_2, \dots, a_n ist, und daß die Librationsgrenzen (unsere Integrationsgrenzen) wiederum nur von diesen Konstanten abhängen. Von den weiteren n Konstanten, welche in die Bahngleichungen (12) eingehen, bleiben die Quantenbedingungen frei. Zu n vorgegebenen Quantenzahlen gehört also nicht etwa eine einzige statische Bahn, sondern ∞^n solcher Bahnen. Dieser Umstand widerspricht indessen durchaus nicht dem Sachverhalt in der von Sommerfeld betrachteten Keplerellipse; denn auch hier werden durch die Quantenbedingungen nur die Dimensionen der Ellipse (die beiden Halbachsen) festgelegt. Die räumliche Lage der Bahnen und der zeitliche Nullpunkt der Bewegung sind keinen Beschränkungen unterworfen.

§ 6. Berechnung der Bahnenergie aus den Quantenbedingungen.

Bei der numerischen Berechnung von A als Funktion von n_1, n_2, n_3 aus den Bedingungen (43) beschränken wir uns auf kleine Werte der Feldstärke E , d. h. wir nehmen an, daß die vom homogenen Feld auf das Elektron ausgeübte Kraft klein ist gegenüber der Anziehung des Atomkernes. Diese Annahme ist im Starkeffekt durchaus gerechtfertigt; denn auch bei den äußersten Bahnen, über welche Messungen vorliegen (H_β -Linie des Wasserstoffs), und den stärksten Feldern (100000 Volt/cm) bleibt das erwähnte Verhältnis unterhalb von 0,3 Proz. Deshalb werden wir die durch (30) gegebenen Funktionen $\sqrt{f_1(\xi)}$ und $\sqrt{f_2(\eta)}$ nach E entwickeln und uns auf Glieder erster Ordnung in E beschränken. Zugleich führen wir neue Variable durch die Beziehung ein:

$$(44) \quad \begin{cases} u = \frac{2A}{S_1} \xi^2 - C_1, \\ v = \frac{2A}{S_2} \eta^2 - C_2, \end{cases}$$

wo

$$(45) \quad \begin{cases} S_1 = \sqrt{e^4(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2 A}, & C_1 = \frac{e^2(\alpha + \beta)}{S_1}, \\ S_2 = \sqrt{e^4(\alpha - \beta)^2 - 2\alpha^2 A}, & C_2 = \frac{e^2(\alpha - \beta)}{S_2}. \end{cases}$$

Es folgt:

$$(46) \quad \begin{cases} \sqrt{f_1(\xi)} d\xi = \sqrt{1 - u^2 + \frac{2eEA\xi^6}{S_1^2}} \cdot \frac{S_1}{\sqrt{2A}} \cdot \frac{d\xi}{\xi} = \\ \frac{S_1}{2\sqrt{2A}} \left[\sqrt{1 - u^2} \frac{du}{u + C_1} + \frac{eES_1(u + C_1)^2}{8A^2 \sqrt{1 - u^2}} \right] du, \\ \sqrt{f_2(\eta)} d\eta = \sqrt{1 - v^2 - \frac{2eEA\eta^6}{S_2^2}} \cdot \frac{S_2}{\sqrt{2A}} \cdot \frac{d\eta}{\eta} = \\ \frac{S_2}{2\sqrt{2A}} \left[\sqrt{1 - v^2} \frac{dv}{v + C_2} - \frac{eES_2(v + C_2)^2}{8A^2 \sqrt{1 - v^2}} \right] dv. \end{cases}$$

Man sieht hieraus, daß die Grenzwerte u_1, u_2 (bzw. v_1, v_2), welche den Werten $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ der Koordinaten ξ, η entsprechen, sich nur um Glieder erster Ordnung in E von ± 1 unterscheiden. Die Quantenbedingungen (43) schreiben sich jetzt so:

$$(47) \quad \begin{cases} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 - u^2} \frac{du}{u + C_1} + \frac{eE \cdot S_1}{8A^2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u + C_1)^2}{\sqrt{1 - u^2}} du = \sqrt{\frac{2A}{m}} \cdot \frac{h}{S_1} n_1, \\ \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{1 - v^2} \frac{dv}{v + C_2} - \frac{eE \cdot S_2}{8A^2} \int_{v_1}^{v_2} \frac{(v + C_2)^2}{\sqrt{1 - v^2}} dv = \sqrt{\frac{2A}{m}} \cdot \frac{h}{S_2} n_2, \\ \int_0^{2\pi} \alpha d\varphi = \frac{h}{\sqrt{m}} n_3. \end{cases}$$

Wir sehen, daß nach der dritten Gleichung die Konstante α von der Feldstärke unabhängig ist; dagegen sind A und β Funktionen der Feldstärke E , welche wir bis auf Glieder zweiter Ordnung so schreiben können:

$$A = A_0 + \Delta A, \quad \beta = \beta_0 + \Delta \beta.$$

Dabei verstehen wir unter A_0, β_0 die Werte, welche diese Konstanten bei verschwindendem E annehmen.

Wir führen jetzt noch eine weitere Transformation der Variablen ein, indem wir

$$(48) \quad u = \cos u, \quad v = \cos v,$$

setzen, und stellen einige mathematische Formeln zusammen, die wir im folgenden benötigen werden.

$$(49) \left\{ \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \frac{du}{u+C_1} &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 u \, du}{\cos u + C_1} = \pi (C_1 - \sqrt{C_1^2 - 1}) \\ &= \pi \frac{e^2(\alpha + \beta) - \alpha \sqrt{2A}}{S_1}, \end{aligned} \right.$$

$$(50) \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \frac{du}{(u+C_1)^2} = \pi \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 - 1}} - 1 \right) = \pi \left(\frac{e^2(\alpha + \beta)}{\alpha \sqrt{2A}} - 1 \right),$$

$$(51) \left\{ \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{(u+C_1)^2 du}{\sqrt{1-u^2}} &= \int_0^\pi (\cos u + C_1)^2 du = \int_0^\pi (\cos^2 u + C_1^2) du \\ &= \pi \left(\frac{1}{2} + C_1^2 \right). \end{aligned} \right.$$

Erste Näherung. Zunächst streichen wir alle mit E behafteten Glieder und berücksichtigen, daß die Grenzen (Wurzeln des Integranden) in erster Näherung ± 1 sind. Wir bestimmen auf diese Weise die Glieder nullter Ordnung der Konstanten, die wir deshalb mit dem Index 0 versehen:

$$(52) \left\{ \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \frac{du}{u+C_1^0} &= \sqrt{\frac{2A_0}{m}} \cdot \frac{h}{S_1^0} n_1, \\ \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-v^2} \frac{dv}{v+C_2^0} &= \sqrt{\frac{2A_0}{m}} \cdot \frac{h}{S_2^0} n_2, \\ \int_0^{2\pi} \alpha \, d\varphi &= \frac{h}{\sqrt{m}} n_3. \end{aligned} \right.$$

Die dritte Gleichung liefert:

$$(53) \quad \sqrt{m} \cdot \alpha = \frac{h n_3}{2\pi},$$

die ersten beiden nach (49) und (45):

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{2A_0}{m}} h \left(n_1 + \frac{n_2}{2} \right) &= \pi e^2 (\alpha + \beta_0), \\ \sqrt{\frac{2A_0}{m}} h \left(n_2 + \frac{n_2}{2} \right) &= \pi e^2 (\alpha - \beta_0), \end{aligned} \right.$$

woher:

$$(55) \quad A_0 = \frac{2 \pi^2 \kappa^2 m e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{(n_1 + n_2 + n_3)^2},$$

$$(56) \quad \beta_0 = \kappa \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2 + n_3}.$$

Der Ausdruck (55) liefert uns mit Hilfe der Frequenzbedingung (2) die Lage der Spektrallinie bei verschwindendem Starkeffekt. Bohr und Sommerfeld sind auf Grund der Betrachtung der Kreisbewegung und der Keplerellipse zu den folgenden Formeln für die Energie gelangt:

$$A_0 = \frac{2 \pi^2 \kappa^2 m e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

bzw.

$$A_0 = \frac{2 \pi^2 \kappa^2 m e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{(n + n')^2}.$$

Der Vergleich mit unserem Ausdruck (55) zeigt, daß trotzdem die geometrische Bedeutung unserer Quantenzahlen eine ganz andere ist, dieselben auf Bahnen von den gleichen diskreten Energiewerten führen. Die statischen Bewegungen, welche sich als Grenzfälle unserer Bedingungen (43) bei verschwindendem äußeren Feld ergeben, sind Keplerellipsen mit ganz anderen Flächenkonstanten und Exzentrizitäten als bei Sommerfeld, jedoch mit denselben großen Achsen a , von denen ja ihre Energie gemäß der Gleichung

$$A_0 = \frac{\kappa e^2}{2 a}$$

allein abhängt. Die möglichen großen Achsen der als Grenzfälle der Bewegung im Starkeffekt auftretenden Ellipsen sind mithin:

$$(57) \quad a = \frac{h^2}{4 \pi^2 \kappa m e^2} (n_1 + n_2 + n_3)^2.$$

Von Sommerfeld¹⁾ ist in allgemeiner Weise gezeigt worden, daß man bei rein periodischen Bahnen stets den gleichen Wert der Energie A_0 erhält, in welchen (kanonischen) Koordinaten man auch die Quantenbedingungen wählen mag, wogegen die Form der statischen Bahnen bei jeder Wahl eine andere ist. Die gute Übereinstimmung mit der Erfahrung bei Quantelung in Polarkoordinaten der Bahnebene (r, ψ) im

1) S. Sommerfeld, l. c. § 7.

Fall der relativistischen Keplerbewegung, zeigt, daß dieses System hier das allein berechnete ist, und dasselbe folgt auch aus unseren in § 5 dargelegten Gesichtspunkten.¹⁾

Wie wir schon erwähnt haben, stimmen aber die durch solche Quantenbedingungen ausgewählten Bahnen mit denen, die sich bei uns für verschwindendes E ergeben, nicht überein. Wenn dies nach Obigem auch keine Verschiebung der Serienlinien bedingt, scheint uns doch die Vorstellung, daß eine durch ein noch so kleines äußeres Feld gegebene Vorzugsrichtung in einschneidender Weise die Form und Lage der statischen Bahnen ändern soll, unzulässig zu sein. Die Aufklärung dieses scheinbaren Paradoxons ist von einer Theorie zu erwarten, welche Relativität und äußeres Feld gleichzeitig berücksichtigt. Wir haben schon aus anderen Gründen (§ 4, p. 500) eine solche Theorie als wünschenswert bezeichnet; es würde sich um eine Erweiterung der Quantenansätze für den Fall handeln, daß sich zwei Effekte, von denen sich jeder einzeln durch Separation der Variablen erledigen läßt, überlagern.

Zweite Näherung. Wir haben jetzt die Glieder erster Ordnung in E der Gleichungen (47) zu betrachten. Dabei ist zu berücksichtigen, daß sowohl die Grenzen u_1, u_2 (bzw. v_1, v_2) von ± 1 abweichen, als auch die Konstanten nunmehr nach obigem $A = A_0 + \Delta A$ und $\beta = \beta_0 + \Delta \beta$ sind, während α unverändert bleibt. Der erstere Umstand (Abweichung der Grenzen von ± 1) zieht indessen nur Effekte zweiter Ordnung nach sich, so daß wir uns auf die Entwicklung von A und β nach E beschränken können. Zur Abkürzung schreiben wir:

$$(58) \quad \Gamma_1 = \sqrt{\frac{2A}{m}} \cdot \frac{1}{S_1}, \quad \Gamma_2 = \sqrt{\frac{2A}{m}} \cdot \frac{1}{S_2}$$

und erhalten:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \frac{du}{(u+C_1)^2} \cdot \left[\frac{\partial C_1}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial C_1}{\partial \beta} \Delta \beta \right] \\ & + \frac{e E S_1^0}{8 A_0^2} \int_{-1}^{+1} \frac{(u+C_1)^2}{\sqrt{1-u^2}} du = n_1 h \left[\frac{\partial \Gamma_1}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \beta} \Delta \beta \right], \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. Fußnote zu p. 502.

$$(59) \left\{ \begin{aligned} & - \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-v^2} \frac{dv}{(v+C_2^0)^2} \cdot \left[\frac{\partial C_2}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial C_2}{\partial \beta} \Delta \beta \right] \\ & - \frac{e E S_2^0}{8 A_0^2} \int_{-1}^{+1} \frac{(v+C_2^0)^2}{\sqrt{1-v^2}} dv = n_2 h \left[\frac{\partial \Gamma_2}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \beta} \Delta \beta \right]. \end{aligned} \right.$$

oder nach (50) und (51):

$$(60) \left\{ \begin{aligned} & \Delta A \left[n_1 h \frac{\partial \Gamma_1}{\partial A} + \pi \left(\frac{e^2(x+\beta_0)}{\alpha \sqrt{2} A_0} - 1 \right) \frac{\partial C_1}{\partial A} \right] + \Delta \beta \\ & \cdot \left[n_1 h \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \beta} + \pi \left(\frac{e^2(x+\beta_0)}{\alpha \sqrt{2} A_0} - 1 \right) \frac{\partial C_1}{\partial \beta} \right] = \frac{e E S_1^0}{8 A_0^2} \pi \left(C_1^{02} + \frac{1}{2} \right), \\ & \Delta A \left[n_2 h \frac{\partial \Gamma_2}{\partial A} + \pi \left(\frac{e^2(x-\beta_0)}{\alpha \sqrt{2} A_0} - 1 \right) \frac{\partial C_2}{\partial A} \right] - \Delta \beta \\ & \cdot \left[n_2 h \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \beta} + \pi \left(\frac{e^2(x-\beta_0)}{\alpha \sqrt{2} A_0} - 1 \right) \frac{\partial C_2}{\partial \beta} \right] = - \frac{e E S_2^0}{8 A_0^2} \pi \left(C_2^{02} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

woraus unter Berücksichtigung von (45), (58), (55), (56) folgt:

$$(61) \left\{ \begin{aligned} & \Delta A \frac{\pi^2 e^2 h^2}{\pi m} \cdot \frac{2n_1 + n_2}{n_1 + n_2 + n_3} - \Delta \beta \frac{4\pi \kappa^2 e^6}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} \\ & = \frac{e E h^4}{8\pi^3 m^2} (6n_1^2 + 6n_1 n_3 + n_3^2), \\ & \Delta A \frac{\pi^2 e^2 h^2}{\pi m} \cdot \frac{2n_2 + n_3}{n_1 + n_2 + n_3} + \Delta \beta \frac{4\pi \kappa^2 e^6}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} \\ & = - \frac{e E h^4}{8\pi^3 m^2} (6n_2^2 + 6n_2 n_3 + n_3^2). \end{aligned} \right.$$

Schließlich:

$$(62) \quad \Delta A = \frac{3h^2 E}{8\pi^3 \kappa e m} (n_1 - n_2)(n_1 + n_2 + n_3).$$

§ 7. Aufspaltung der Linien im Starkeffekt.

Durch die Rechnungen des letzten Paragraphen haben wir den Energieausdruck eines Elektrons im Starkeffekt bis auf Glieder zweiter Ordnung in E ermittelt. Er lautet nach (55) und (62):

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} A & = A_0 + \Delta A = \frac{2\pi^2 \kappa^2 m e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} \\ & + \frac{3h^2 E}{8\pi^3 \kappa m e} (n_1 + n_2 + n_3)(n_1 - n_2). \end{aligned} \right.$$

Bei Anwendung der Frequenzbeziehung

$$(2) \quad \nu = \frac{A_2 - A_1}{h c}$$

zur Bestimmung der Schwingungszahl, liefert der erste Term bei verschwindendem zweiten in bekannter Weise die Serie:

$$(64) \quad \nu = \frac{2\pi^2 x^2 m e^4}{h^3 c} \left[\frac{1}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} - \frac{1}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \right].$$

Wo sich die Quantenzahlen m_1, m_2, m_3 auf die äußere Bahn, n_1, n_2, n_3 auf die innere Bahn beziehen. Dabei haben wir, wie in der Spektroskopie gebräuchlich, als Schwingungszahl den reziproken Wert der Wellenlänge

$$\left(\nu = \frac{1}{\lambda} \right)$$

bezeichnet, wodurch das Auftreten der *Lichtgeschwindigkeit* c im Nenner bedingt ist. Der zweite, von E abhängige Term, zeigt uns, daß bei Vorhandensein eines elektrischen Feldes die Lage der Linie im allgemeinen nicht mehr mit der durch (64) gegebenen Gleichgewichtslage übereinstimmt, sondern daß mehrere gegen dieselbe verschobenen Linien auftreten können: *Die Spektrallinie zeigt eine Aufspaltung*, wobei die Verschiebung der Komponenten durch den Ausdruck:

$$(65) \quad \begin{cases} \Delta \nu = \frac{3h}{8\pi^2 x m e c} E \cdot Z, \\ Z = \{(m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2) - (n_1 + n_2 + n_3)(n_1 - n_2)\}, \end{cases}$$

dargestellt wird. *Das ist die endgültige Formel des Starkeffektes für wasserstoffähnliche Linien*, d. h. für Linien, deren Emissionsmechanismus aus einem einzelnen Kern und einem einzelnen Elektron besteht, wie wir es in unserer Theorie vorausgesetzt haben.

Wir finden von vornherein zwei wichtige Schlüsse, die wir aus dem Ausdruck (65) ziehen können, durch die Starkschen Messungen an Wasserstoff bestätigt. Erstens war die Aufspaltung, so genau Stark messen konnte, proportional dem Feld; zweitens war sie in bezug auf die Gleichgewichtslage ($\Delta \nu = 0$) symmetrisch.¹⁾ In der Tat kann man durch Vertauschung der für die Lagenbestimmung gleichberechtigten

1) J. Stark, Gött. Nachr. p. 436 u. 443. 1914.

Zahlen n_1 und n_2 (und gleichzeitig m_1 und m_2) zu jeder positiven Verschiebung eine gleich große negative finden. Wichtig ist ferner, daß ein und dieselbe Zahl Z durch verschiedene Kombinationen der sechs Quantenzahlen entstehen kann. Durch verschiedene Entstehungsweise läßt es sich nämlich erklären, daß mit ein und demselben $\Delta \nu$ zwei Komponenten mit verschiedenen Polarisationen auftreten können. Wir werden dies weiter unten an einem Sonderfall erläutern.

Im Falle des Wasserstoffs ist der Kern einfach geladen ($\kappa = 1$), und Gleichung (64) liefert die *Balmerserie* des Wasserstoffs, wenn wir

$$(66) \quad \begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 = 2, \\ m_1 + m_2 + m_3 = 3, 4, 5, 6, \dots \end{cases}$$

setzen. In der Wellenlängenskala ($\lambda = 1/\nu$) erhalten wir mit $\kappa = 1$ die Verschiebungen:

$$(67) \quad \Delta \lambda = \frac{3h\lambda^2}{8\pi^2 m e c} E \cdot Z.$$

Setzen wir für die Konstanten ihre Werte ein ($e = 4,69 \cdot 10^{-10}$, $e/m = 5,25 \cdot 10^{17}$, $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$) und messen die Feldstärken in Volt/cm, so ergibt sich der Zahlenfaktor:

$$(68) \quad \Delta \lambda = 6,60 \cdot 10^{-5} \lambda^2 E \cdot Z.$$

Es ist zu bemerken, daß in der neuesten Auflage seines Buches¹⁾ Hr. Planck etwas abweichende Zahlen für die Universalkonstanten angibt (nämlich $e = 4,67 \cdot 10^{-10}$, $h = 6,41 \cdot 10^{-27}$); die Frage nach den besten Werten ist für uns indessen ohne Bedeutung, da die Feldstärke, welche Stark bei der Aufnahme seiner Feinzerlegung der Wasserstofflinien hatte, von ihm nicht direkt gemessen, sondern nur nach früheren Messungen extrapoliert wurde, so daß sie mit einem Fehler von einigen Prozent behaftet sein kann. Unter Zugrundelegung der von Stark angegebenen Feldstärke von 104000 Volt/cm erhält man für die vier ersten Linien der *Balmerserie*:

H_α	$\lambda = 6562,8 \text{ \AA}$	$\Delta \lambda = 2,94 \cdot Z \text{ \AA}$
H_β	4861,3	1,61 · Z
H_γ	4340,5	1,30 · Z
H_δ	4101,7	1,15 · Z

1) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 166, 167. Leipzig 1913.

Wir ziehen es indessen vor, den Wert von E für die Linien H_γ und H_δ auf 107000 Volt/cm¹) (bzw. 108000) zu korrigieren, so daß wir erhalten:

$$\begin{array}{lll} H_\gamma & \lambda = 4340,5 \text{ \AA} & \Delta\lambda = 1,33 \cdot Z \cdot \text{\AA} \\ H_\delta & 4101,7 & 1,19 \cdot Z \end{array}$$

Die Gründe, aus denen sich eine solche Diskrepanz erklären könnte, lassen wir vorläufig offen, erinnern aber daran, daß das elektrische Feld im leuchtenden Teil der Kanalstrahlerröhre nicht ganz homogen ist. Es wäre möglich, daß die höheren Serienlinien vorwiegend in einem anderen Teil des Feldes emittiert werden.

Bei der Aufstellung aller möglichen Werte von Z übernehmen wir das Sommerfeldsche *Auswahlprinzip*, welches aus der positiven Natur der Quantenzahlen fließt und darin besteht, daß nicht nur die Summe $m_1 + m_2 + m_3$ beim Übergang in eine andere Bahn stets abnehmen muß, sondern auch jede dieser Zahlen einzeln. Die Auswahl wird uns deshalb durch die drei Ungleichungen beschränkt:

$$(69) \quad n_1 \leq m_1, \quad n_2 \leq m_2, \quad n_3 \leq m_3.$$

In den folgenden Tabellen stellen wir alle mit diesem Grundsatz zu vereinbarenden Absolutwerte der Verschiebung $\Delta\lambda$ zusammen. Jedem dieser Werte entsprechen zwei in bezug auf den Nullpunkt ($\Delta\lambda = 0$) symmetrische Komponenten. Aus weiter unten anzugebenden Gründen behandeln wir dabei zwei Gruppen von Komponenten getrennt: in der zweiten Kolonne sind die Komponenten angegeben, bei denen die Differenz $m_3 - n_3$ eine gerade Zahl ($2l$) oder 0 ist; in der vierten Kolonne diejenigen, bei denen $m_3 - n_3$ ungerade ($2l + 1$) ist. Die (eckig) eingeklammerten Komponenten sind mit dem Auswahlprinzip (69) nicht verträglich, und die Bedeutung der Zahlen und Zeichen in den mit Q_m überschriebenen Spalten wird im nächsten Paragraphen erklärt werden. Zum Vergleich geben wir die von J. Stark in der wiederholt zitierten Arbeit gemessenen Werte von $\Delta\lambda$ nebst der von ihm angegebenen Intensität jeder Komponente an.

1) In der vorläufigen Mitteilung (Physik. Zeitschr. 17. p. 149. 1916) wurde irrtümlicherweise 102000 Volt/cm (an Stelle von 107000 Volt/cm) angegeben.

$m_1 + m_2 + m_3 = 3$ Tabelle I (H_α -Linie). $\lambda = 6562,8 \text{ \AA}$

Z	Berechnet				Gemessen			
	$m_2 - n_3 = 2l$		$m_3 - n_3 = 2l+1$		p-Komp.		s-Komp.	
	$\Delta\lambda$	Q_m	$\Delta\lambda$	Q_m	$\Delta\lambda$	Int.	$\Delta\lambda$	Int.
5	14,7	*			—			
4	11,7	1			11,5	1,2		
3	8,8	1			8,8	1,1		
2	5,9	1	5,9	*	6,2	1	—	
1	2,9	*	2,9	(1)	—		2,6	1
0	—		0	(1)			0	2,6

 $m_1 + m_2 + m_3 = 4$ Tabelle II (H_β -Linie). $\lambda = 4861,3 \text{ \AA}$

Z	Berechnet				Gemessen			
	$m_2 - n_3 = 2l$		$m_3 - n_3 = 2l+1$		p-Komp.		s-Komp.	
	$\Delta\lambda$	Q_m	$\Delta\lambda$	Q_m	$\Delta\lambda$	Int.	$\Delta\lambda$	Int.
12	19,4	*	[19,4]	3	19,4	1	19,3	1
10	16,1	2	[16,1]	3	16,3	11,5	16,4	1,1
8	12,9	2	12,9	*	13,2	9,1	13,2	1,3
6	9,7	2	9,7	1	10,0	4,8	9,7	9,7
4	6,5	*	6,5	1	6,7	1	6,6	12,6
2	3,2	(2)	3,2	1	3,3	1,2	3,4	3,3
0	0	(2)	0	1	0	1,4	0	1,4

 $m_1 + m_2 + m_3 = 5$ Tabelle III (H_γ -Linie). $\lambda = 4340,5 \text{ \AA}$

Z	Berechnet				Gemessen			
	$m_2 - n_3 = 2l$		$m_3 - n_3 = 2l+1$		p-Komp.		s-Komp.	
	$\Delta\lambda$	Q_m	$\Delta\lambda$	Q_m	$\Delta\lambda$	Int.	$\Delta\lambda$	Int.
21	28,0	*	—		29,4	1 (fr.)		
20	—		[26,6]	4			26,3	1
18	23,9	3	—		23,9	10,8		
17	—		[22,7]	4			22,8	1,1
16	—		21,3	*			—	
15	20,0	3	—		19,9	7,2		
13	—		17,3	2			17,3	6,1
12	16,0	3†	—		15,9	2,0		
11	14,4	*	—		—			
10	—		13,3	2			13,3	4,3
9	12,0	*	—		—			
8	10,6	2	—		10,6	1		
7	—		9,3	2†			9,7	1,2
6	—		8,0	*			—	
5	6,7	2	—		6,6	1,5		
4	—		5,3	*			—	
3	—		4,0	(3)			3,9	3,6
2	2,7	2	—		2,6	1,6		
1	1,3	*	—		—			
0	—		0	(3)			0	7,2

Tabelle IV (H_{β} -Linie).

$$m_1 + m_2 + m_3 = 6,$$

$$\lambda = 4101,7 \text{ \AA}$$

Z	Berechnet				Gemessen			
	$m_2 - n_2 = 2l$ $\Delta\lambda$	Q_m	$m_2 - n_2 = 2l+1$ $\Delta\lambda$	Q_m	p-Komp. $\Delta\lambda$	Int.	s-Komp. $\Delta\lambda$	Int.
32	38,1	*			37,5	1 (fr.)		
30			[35,8]	5			34,8	1 (fr.)
28	33,4	4			33,4	7,2		
26			30,9	*			30,4	1,3
24	28,6	4			28,6	2,8		
22			26,2	3			25,8	2,4
20	23,8	4†			24,2	1,1		
18			21,3	3			21,2	2,0
16	19,1	3			19,6	1,2		
14			16,7	3†			17,2	1
12	14,3	3			14,4	1,5		
10			11,9	(3)			11,9	2,1
8	9,5	2			9,6	1,2		
6			7,3	(3)			7,4	3,2
4	4,8	(4)			5,2	1		
2			2,4	(3)			2,4	1,3
0	0	(4)			—			

Die ausführliche Diskussion dieser Tabellen geben wir in den beiden nächsten Paragraphen. Um ihre Entstehung zu veranschaulichen, wollen wir für die H_{α} -Linie alle dem Auswahlprinzip (69) entsprechende Bahnübergänge zusammenstellen. Es gilt hier:

Tabelle V.

m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3	Z	$m_2 - n_2$	Q_m
3	0	0	2	0	0	5	0	*
2	0	1	2	0	0	2	1	*
2	0	1	1	0	1	4	0	1
1	0	2	1	0	1	1	1	(1)
1	0	2	0	0	2	3	0	1
0	0	3	0	0	2	0	1	(1)
2	1	0	2	0	0	-1	0	*
2	1	0	1	1	0	3	0	1
1	1	1	1	0	1	-2	0	1
1	1	1	1	1	0	0	1	(1)
1	1	1	0	1	1	2	0	1

Nach unserer obigen Bemerkung brauchen wir den Fall $m_2 > m_1$ nicht besonders zu erörtern, da er sich durch Vertauschung der Rollen von m_1 und m_2 , n_1 und n_2 aus dem

betrachteten ergibt und nur zu einer Umkehrung des Vorzeichens von Z führt. Die Angaben der letzten Spalte werden im nächsten Paragraphen erklärt. Beachtenswert ist die mehrfache Entstehung einiger Komponenten. Bei den höheren Linien ($H_\beta, H_\gamma, H_\delta$) sind die Entstehungsmöglichkeiten noch vielfältiger.

§ 8. Polarisation und Intensität der Komponenten.

Die Theorie des Bohrschen Atommodells in ihrer derzeitigen Form ist auf der Betrachtung der statischen Bahnen zu Anfang und zum Schluß jedes individuellen Strahlungsvorganges aufgebaut. Die Verhältnisse während des Überganges eines Elektrons von einer Bahn zu einer anderen sind für uns noch ganz dunkel. Dementsprechend ist der Zweck dieses Paragraphen nicht, theoretische Schlüsse über Polarisationen und Intensitäten der einzelnen Komponenten zu ziehen, denn wir können höchstens Plausibilitätsgründe für die eine oder die andere Annahme geltend machen, sondern durch Sichtung des vorliegenden Beobachtungsmaterials Gesetzmäßigkeiten in der Emission aufzudecken.

Was zunächst die *Schwingungsrichtungen* betrifft, so erhellt das Gesetz, von welchem sie beherrscht werden, aus den Tab. I—IV des letzten Paragraphen. Wir finden ausnahmslos die folgende Regel bestätigt: *Eine geradzahlige Differenz $m_3 - n_3$ führt auf parallele (p-)Polarisation, eine geradzahlige auf senkrechte (s-)Polarisation.* Dabei verstehen wir mit Stark unter p -Komponenten diejenigen, in welchen der elektrische Vektor parallel der Richtung des äußeren Feldes schwingt, unter s -Komponenten die, in denen er senkrecht zu dieser Richtung schwingt. Eine Erklärung dieses Umstandes vermögen wir vorerst nicht zu geben und erinnern nur daran, daß durch die Quantenzahl n_3 die Flächenkonstante p_φ in der zur Richtung des Feldes E senkrechten Ebene gegeben wird (Äquatorialebene $x = 0$ unserer Fig. 1 und 2).

Wir sehen hieraus u. a., daß beim Übergang zwischen zwei ebenen Bahnen $\alpha = 0$ (§ 4) stets eine p -Komponente emittiert wird. Jedenfalls ist es bemerkenswert, daß sich ein so strenges und einfaches Gesetz ergibt; unseres Wissens ist dies neben der, allerdings viel allgemeineren, Frequenzbestimmung durch Bedingung (2) die einzige präzise Aussage, die

man bis jetzt über Quantenemission des Lichtes machen kann.

Wir gehen zur Betrachtung der *Intensitäten* über. Dieselben werden offenbar durch zwei Faktoren bestimmt. Erstens durch die Wahrscheinlichkeit der Anfangs- und Endbahn, zweitens durch die Verhältnisse beim Übergang, welche wir auch als Wahrscheinlichkeit des Überganges zwischen zwei vorgegebenen Bahnen bezeichnen wollen. In bezug auf diesen zweiten Faktor scheint uns die folgende Hypothese dem Beobachtungsmaterial am besten angepaßt zu sein: *Eine durch sechs Quantenzahlen $m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$ bestimmte Komponente ist caeteris paribus um so stärker, je größer die größte der drei Differenzen $m_1 - n_1, m_2 - n_2, m_3 - n_3$ („Quantensprünge“) ist.* „Caeteris paribus“ bedeutet dabei, daß diese Verhältnisse eben durch den ersten Faktor, die Wahrscheinlichkeit der zugehörigen statischen Lagen, getrübt werden können; in diesem Sinne sind auch die Komponenten zweier *verschiedener* Spektrallinien nicht miteinander vergleichbar. Unsere Forderung gibt uns also ohne Kenntnis des anderen Faktors nur eine *notwendige, aber nicht immer hinreichende* Bedingung für das kräftige Auftreten einer Linie; ihr liegt die Auffassung zugrunde, daß es sich hier um etwas Ähnliches handelt wie bei einer Niveaudifferenz: je größer die Differenz der Quantenzahlen, desto größer auch das Streben nach einem Ausgleich. Wir haben in den Tabellen für jede Komponente den zugehörigen größten Quantensprung (Q_m) eingetragen; entsprechend der von den beiden anderen abweichenden geometrischen Bedeutung der dritten Quantenzahlen m_3, n_3 haben wir den Fall, daß $m_3 - n_3$ die größte der drei Differenzen ist, durch Einklammern von Q_m gekennzeichnet.¹⁾ Innerhalb der durch das Sommerfeldsche Auswahlprinzip (69) gegebenen Komponenten (also mit Ausschluß der Werte in eckigen Klammern) bestätigt sich unsere Hypothese insofern, als die kräftig hervortretenden Komponenten stets den maximalen Quantensprung der betreffenden Kolonne aufweisen. Das Fehlen stärkerer Intensitätsunterschiede in der Aufspaltung der H_a -

1) In bezug auf die von Stark angegebenen Intensitäten ist zu bemerken, daß dieselben nur innerhalb einer Reihe (Kolonne) von p - oder s -Komponenten gelten, also nicht von einer Reihe zur anderen oder von einer Linie zur anderen verglichen werden dürfen.

Linie beruht demnach darauf, daß hier der einzige Quantensprung 1 möglich ist. Der besondere Vorzug unserer Erklärung besteht aber darin, daß sie auch das Vorhandensein der überzähligen Komponenten zu verstehen gestattet, durch welche die Sommerfeldsche Regel (69) durchbrochen wird, indem hier eine der Quantenzahlen bei der Emission zunimmt. Es sind verschiedene Kombinationen möglich, die auf die (eckig) eingeklammerten Werte von $\Delta\lambda$ führen; der Umstand aber, daß diese unvorhergesehenen Komponenten nur in der s -Polarisation auftreten, weist darauf hin, daß es sich hier um eine Zunahme der Quantenzahl m_3 um eine Einheit ($m_3 - n_3 = -1$) handelt. Das Zunehmen der anderen Quantenzahlen um 1, könnte nämlich auch überzählige p -Komponenten erzeugen. Wir müssen daher die Ungleichungen (69) als eine Wahrscheinlichkeitssache auffassen und sagen, daß ihre Verletzung zwar sehr unwahrscheinlich, aber bei günstigen Nebenbedingungen nicht unmöglich ist. Diese günstigen Nebenbedingungen sind von unserem Standpunkt darin zu erblicken, daß die betreffende Bahnkombination in einer anderen Koordinate Gelegenheit zu einem außerordentlich großen Quantensprung bietet. Wir gelangen zu einer vollständigen Einordnung der eingeklammerten Komponenten, wenn wir das Sommerfeldsche Prinzip (69) in folgender Weise abändern:

$$(70) \quad n_1 \leq m_1, \quad n_2 \leq m_2, \quad n_3 \leq m_3 + 1$$

mit der Nebenbedingung, daß $n_3 = m_3 + 1$ nur dann zulässig ist, wenn eine der Differenzen $m_1 - n_1$ oder $m_2 - n_2$ besonders groß wird. Aus den Tabellen erkennt man, daß dieser Fall bei den eingeklammerten $\Delta\lambda$ immer vorliegt; daß diese Komponenten auch noch bei Erfüllung der Nebenbedingung wenig wahrscheinlich sind, sieht man aus ihrer geringen Intensität.

Einen besonderen Typus von Bahnübergängen haben wir in den Tabellen mit einem Kreuz (†) bezeichnet. Es sind dies die Fälle, in denen eine Bahn, welche ihre größte Elongation im Halbraum der positiven x hat (Fig. 1), in eine solche übergeht, die die größte Elongation bei negativem x aufweist. Ein derartiges Umklappen der Bahnform ist schon a priori nicht wahrscheinlich, und dies wird auch durch die Beobachtung bestätigt.

Wir gehen zur Betrachtung des anderen Intensitätsfaktors, der Wahrscheinlichkeit der statischen Bahnen selbst, über.

Hier sind erstens einige Worte über die Bahnen vom Typus $(n_1, 0, 0)$ und $(0, n_2, 0)$ zu sagen; das sind nämlich geradlinige „Pendelbahnen“, wie wir sie in § 4 (sub d) beschrieben haben.¹⁾ Bereits dort haben wir betont, daß dieser Fall so wenig wahrscheinlich ist, daß man zunächst überhaupt an seiner Möglichkeit zweifeln möchte. Wir haben die zu solchen Bahnen gehörenden Komponenten in unseren Tabellen mit einem Sternchen (*) gekennzeichnet.²⁾ Man sieht, daß sie (neben den soeben erwähnten mit negativem Quantensprung) durchweg die schwächsten sind und in den Linien H_a und H_γ überhaupt nicht aufgenommen werden konnten. Darüber hinaus hatten wir in unseren Versuchen, einen allgemeinen Gesichtspunkt für die Bahnwahrscheinlichkeit aufzustellen, keinen Erfolg und können nur über negative Resultate berichten. Energetische Verhältnisse kommen dabei nicht in Frage, da innerhalb einer Linie die Energiedifferenz der beiden Bahnen bis auf den kleinen Term, der eben den Starkeffekt liefert, konstant ist. Man könnte z. B. den bei vorgegebenen Quantenzahlen n_1, n_2, n_3 den sechs kanonischen Koordinaten $(\xi, \eta, \varphi, p_\xi, p_\eta, p_\varphi)$ zur Verfügung stehenden Phasenraum als Maß der Wahrscheinlichkeit dieser Kombination betrachten. Das würde indessen zu ganz falschen Resultaten führen; hier wie in der gewöhnlichen Keplerbewegung müßten wir schließen, daß die Kreisbewegung von allen die unwahrscheinlichste sei. Demgegenüber hält Sommerfeld in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung die Ellipsen mit wachsender Exzentrizität für immer weniger wahrscheinlich, und auch aus unserem Material geht hervor, daß die Kreisbahnen im Starkeffekt $(0, 0, n_3; \text{vgl. Fußnote 1})$ im allgemeinen mit nicht geringer

1) In den Integralen (1) hat bei unserer Wahl des Integrationsweges p stets dasselbe Vorzeichen wie $d q_i$; der Integrand ist also wesentlich positiv. Daher kann eine Quantenzahl nur dann Null werden, wenn der entsprechende Impuls p dauernd verschwindet. In diesem Falle liegt aber eine der in § 4 besprochenen Ausartungen der Bahn vor. Insbesondere sind $(n_1, 0, 0)$ und $(0, n_2, 0)$ Pendelbahnen, $(0, 0, n_3)$ Kreisbahnen.

2) Das sind natürlich nur diejenigen Komponenten, deren sämtliche Entstehungsweisen mit einer Pendelbahn verknüpft sind. Wenn nur ein Teil der Entstehungsweisen von solchem Typus ist, so sind diese bei der Angabe des größten Quantensprunges Q_m in unseren Tabellen nicht berücksichtigt.

Intensität auftreten.¹⁾ Man könnte in doppelter Weise versuchen, die Sommerfeldsche Annahme auf unseren Fall zu übertragen. Einerseits spielt unsere Konstante β eine der Exzentrizität ähnliche Rolle, wie denn auch die ganz unwahrscheinlichen Pendelbahnen zu den Extremalwerten $\pm \beta$ gehören. Andererseits sind bei konstanter großer Achse die Ellipsen größerer Exzentrizität diejenigen, welche die größte Elongation aufweisen und daher von benachbarten Atomen herrührenden störenden Einflüssen am ehesten unterworfen sind. Es wäre daher möglich, die Wahrscheinlichkeit einer Bahn ihrer größten Elongation zuzuordnen. Es scheint aber, daß sich keine dieser beiden Auffassungen bestätigt, wenn auch vielleicht die schwache Intensität der Komponenten $Z = 0, 2, 4$ (die zu den sehr flachen Bahnen $(0, 0, 6)$ und $(1, 0, 5)$ gehören), trotz der großen Quantensprünge $Q_m = (4)$ und $Q_m = (3)$, in einer der zweiten ähnlichen Weise zu deuten sind.

Es ist indessen zu berücksichtigen, daß die von Stark mitgeteilten Intensitäten, nach seiner eigenen Angabe, keine hoch anzuschlagende Genauigkeit besitzen; und da bereits die von uns zusammengestellten Gesichtspunkte den allgemeinen Gang der Intensitätsverhältnisse befriedigend wiedergeben, so sind weitere Annahmen, die auf eine Verfeinerung derselben abzielen, an dem vorliegenden Material nur schwer prüfbar.

§ 9. Vergleich mit der Erfahrung. Schlußbemerkungen.

Außer der Feinzerlegung der Wasserstofflinien können wir kaum anderes Beobachtungsmaterial zur Prüfung unserer Theorie heranziehen. Denn einerseits ist der Bau anderer Elemente und der Emissionsmechanismus ihrer Linien noch nicht vollständig aufgeklärt, andererseits sind die in dieser Richtung gemachten Messungen noch viel zu roh.²⁾ Auch die Röntgenspektren, mit deren Studium Sommerfeld so schöne Erfolge hatte, kommen für (künftige) Starkeffektmessungen

1) Z. B. die Komponenten $\Delta \lambda = 0$ der Linien H_α (Tab. I) und H_γ (Tab. III) verdanken ihre Entstehung zum Teil solchen Kreisbahnen.

2) Inzwischen hat H. Lüssem (Ann. d. Phys. 49. p. 865. 1916) eine im Starkschen Laboratorium ausgeführte Arbeit über die Feinzerlegung von Linien des Lithiumspektrums veröffentlicht.

Anmerkung bei der Korrektur.

nicht in Betracht, da caeteris paribus sich in unserer Formel (65) die Abhängigkeit der Aufspaltung von der Kernladung (κe) durch den Faktor $1/\kappa$ ausdrückt und in der Wellenlängenskala noch λ^2 hinzutritt. Beide Faktoren wirken für Röntgenfrequenzen in derselben Richtung und machen die Erscheinung unmeßbar klein.

Wir haben unsere Aufmerksamkeit also auf die bereits vielfach erwähnte Stark'sche Arbeit zu beschränken, und wollen, um die Beurteilung der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu erleichtern, einen Absatz derselben wörtlich anführen¹⁾: „Es ist ... mit der Möglichkeit zu rechnen, daß außer den beobachteten wenig intensiven Komponenten noch andere vorkommen, welche noch lichtschwächer sind und darum in meinen Spektrogrammen unterbelichtet blieben. Mit Sicherheit möchte ich diesen Fall bei der Linie H_α vermuten. Bei dieser Linie waren nämlich selbst die neun intensivsten Komponenten kaum normal belichtet ... Was die Linien H_β , H_γ , H_δ betrifft, so ist ihre Komponentenanzahl wohl annähernd richtig; immerhin können auch bei ihnen weitere sehr wenig intensive Komponenten vorkommen und, auch hiervon abgesehen, muß ich einige der für sie im nachstehenden angegebenen Komponenten als fraglich bezeichnen, da sie entweder nur zweifelhaft schwach herauskamen, oder da sie in den Spektrogrammen am Orte möglicher Geister liegen“.

Hiernach ist die Übereinstimmung mit der Erfahrung, welche unsere Formel (65) (die, nebenbei bemerkt, nur bekannte Größen und keine einzige empirische Konstante enthält) mit den in § 8 niedergelegten Anwendungsvorschriften liefert, eine ganz überraschend gute. Es scheint, daß Hr. Stark die Vollständigkeit seiner Resultate unterschätzt hat; denn in den Linien H_β und H_δ ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung eine vollständige (Tabb. II und IV). In den Aufnahmen der H_α - und H_γ -Linie (Tabb. I und III) fehlen gerade die Komponenten, welche vom theoretischen Standpunkt die schwächsten sein müssen.²⁾ Auch die Ge-

1) J. Stark, l. c. p. 434.

2) Und die durch ein Sternchen als zu *Pendelbahnen* gehörig gekennzeichnet sind.

nauigkeit, mit der die Lage der Komponenten durch unsere Formel (mit der auf p. 511 erwähnten Korrektur der Feldstärke) wiedergegeben wird, ist im allgemeinen sehr gut; etwas größere Abweichungen kommen nur bei den sehr lichtschwachen, schwer zu messenden Komponenten vor.

Wir glauben, daß die mitgeteilten Resultate einen neuen Beweis von schlagender Überzeugungskraft für die Richtigkeit des Bohrschen Atommodells liefern. Wir stehen in der Kenntnis der Atommechanismen im Anfang einer neuen Entwicklung, und es scheint, daß von der Quantentheorie für die Atomistik noch viel zu erwarten ist.

München, den 6. Mai 1916.

(Eingegangen 9. Mai 1916).

Nachtrag bei der Korrektur. — Inzwischen ist eine Abhandlung „Zur Quantentheorie“ von K. Schwarzschild¹⁾ erschienen, deren Gedankengang im wesentlichen mit dem unseren übereinstimmt. Ein Unterschied der Auffassungen besteht zwar nur für gewisse Sonderfälle, zieht aber eine Verschiedenheit der beiderseitigen Endformeln für den Starkeffekt nach sich. Wir werden deshalb in einer besonderen Note auf das Verhältnis der beiden Arbeiten ausführlicher zurückkommen.

1) K. Schwarzschild, Berl. Ber. p. 548. 1916.
